162 - Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

Cadre : $\mathbb{K}$ un corps commutatif quelconque.

I) Systèmes d'équations linéaires

1) Définitions générales

Déf 1 : On appelle système d'équations linéaires de p équations à n inconnues un système de la forme :

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + \dots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$ d'inconnue $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ avec $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq p \\ 1\leq j\leq n}} \in \mathbb{K}^{pn}$, $(b_j)_{1\leq j\leq p} \in \mathbb{K}^p$

Déf 2 : Une solution est un n-uplet $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ dont toutes les composantes satisfont les équations du système (S).

Déf 3 : Un système d'équations linéaires est dit compatible s'il admet une solution.

Ex 4 : $\begin{cases} x + 3y + 5z = 4 \\ 2x + 2y + 2z = 4 \\ 3x + 4y + 5z = 7 \end{cases}$ est compatible et admet $X = (1,1,0)$ comme solution.

Déf 5 : Un système d'équations linéaires est dit homogène si le second membre $(b_j)_{1\leq j\leq p}$ est nul.

Prop 6 : Un système homogène est compatible grâce à la solution nulle.

Rmq 7 : Résoudre un système homogène revient à déterminer l'intersection de noyaux des p formes linéaires $\varphi_i : (x_j)_{1\leq j\leq n} \mapsto \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$

Déf 8 : Le système (S) est équivalent à l'expression matricielle $AX = B$ où $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq p \\ 1\leq j\leq n}}$, $X = (x_j)_{1\leq j\leq n}$ et $B = (b_j)_{1\leq j\leq p}$

Déf 9 : On appelle rang du système (S) le rang $\dim(\mathrm{Im}(A)) = \mathrm{Rg}(A)$ où A est la matrice associée au système.

Prop 10 : Soit un système $AX = B$
- Si $B \notin \mathrm{Im}(A)$, le système est incompatible.
- Si $B \in \mathrm{Im}(A)$ alors le système est compatible et :
  - i) Soit $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$ et il y a unicité de la solution
  - ii) Soit $\mathrm{Ker}(A) \neq \{0\}$ et l'ensemble des solutions est un espace affine

Rmq 11 : Cet espace affine est $X_0 + \mathrm{Ker}(A)$ où $AX_0 = B$.

2) Systèmes de Cramer

Notation 12 : On note $(C_j)_{1\leq j\leq n}$ les colonnes de la matrice A i.e. pour tout $j \in [\![1,n]\!]$ $C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{pj} \end{pmatrix}$.

Déf 13 : Un système $AX = B$ est dit de Cramer si A est carrée et inversible.

Ex 14 : Le système de l'Exemple 4 n'est pas de Cramer car la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible. En effet, $C_3 = 2C_2 - C_1$

Mais le système $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + 2y = \sqrt{2} \end{cases}$ est de Cramer car $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$.

Théorème 15 : Un système $AX = B$ de Cramer admet une unique solution donnée par $X = \left(\dfrac{\det(C_1, \dots, C_{i-1}, B, C_{i+1}, \dots, C_n)}{\det(A)}\right)_{1\leq i\leq n}$

Rmq 16 : Le calcul de $\det(A) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$ se faisant en plus de $n!$ opérations, on cherchera des méthodes plus efficaces.

Rmq 17 : Les solutions sont des fractions rationnelles en les coefficients de la matrice A et du second membre B.

II/ Pivot de Gauss & applications

1) Opérations élémentaires

Déf 18 : On considère trois matrices élémentaires sur les lignes d'une matrice :
- la dilatation $D_i(\alpha) = \begin{pmatrix} I_{i-1} & & 0 \\ & \alpha & \\ 0 & & I_{n-i} \end{pmatrix} = I_n + (\alpha - 1)E_{ii}$ où $\alpha \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$
- la transvection $T_{ij}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & & \beta \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = I_n + \beta E_{ij}$ où $\beta \in \mathbb{K}$ et $i \neq j$
- la permutation $P_{ij} = \begin{pmatrix} I_{i-1} & & & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & I_{j-i} & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & & & I_{n-j} \end{pmatrix} = I_n + E_{ij} + E_{ji} - E_{ii} - E_{jj}$ où $i < j$

Rmq 19 : L'application $GL_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $(P,A) \mapsto PA$ est une action à gauche de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit de manière analogue l'action à gauche $(Q,A) \mapsto AQ^{-1}$.

Rmq 20 : La multiplication à gauche par :
- une dilatation $D_i(\alpha)$ est équivalente à $L_i \leftarrow \alpha L_i$
- une transvection $T_{ij}(\beta)$ est équivalente à $L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$
- une permutation P_{ij} est équivalente à $L_i \leftrightarrow L_j$

Prop 21 : Les actions ci-dessus conservent le rang.

Prop 22 : Les solutions d'un système ne changent pas par opérations élémentaires sur les lignes.

Prop 23. $\det(D_i(\alpha)A) = \alpha \det(A)$; $\det(T_{ij}(\beta)A) = \det(A)$;
$\det(P_{ij}A) = -\det(A)$.

2) Systèmes échelonnés

Déf 24 : On appelle pivot d'une ligne non nulle le coefficient non nul situé le plus à gauche. Une matrice est dite échelonnée en ligne si :
- si une ligne est nulle, toutes les suivantes sont ligres.
- le pivot d'une ligne est strictement plus à droite que les précédents.

Déf 25 : Une matrice échelonnée est dite réduite si de plus tous les pivots sont égaux à 1 et sont les seuls coefficients non nuls de leur colonne.

Rmq 26 : On définit de manière analogue les matrices échelonnées (réduites) en colonnes.

Ex 27 : $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ n'est pas échelonnée contrairement à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est échelonnée et réduite.

Rmq 28 : Si une matrice est échelonnée, on peut remonter son système d'équations.

Rmq 29 : Le nombre de pivot d'une matrice est égal à son rang.

3) Pivot de Gauss

Théorème 30 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que PA soit échelonnée où P est un produit de matrices élémentaires.

Ex 31 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & -5 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - \frac{5}{4}L_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Donc $T_{32}(-5/4)\, T_{31}(-3)\, T_{21}(-2) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Algo 32 :
- quitte à permuter les lignes, on suppose que $a_{11} \neq 0$. Si $C_1 = 0$, on passe à C_2
- $\forall i \in [\![2,p]\!]$ $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} L_1$
- on se ramène à un système $(p-1)\times(n-1)$ et on répète.

Résultat : on obtient la matrice échelonnée PA.

Rmq 33 : Le pivot de Gauss a une complexité en $O(n^3)$.

Corollaire 34 : Toute matrice est dans l'orbite d'une unique matrice échelonnée réduite en ligne par l'action $(P,A) \mapsto PA$

Théorème 35 : Soit $AX = B$, où $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, de rang R.
Si $J = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1R} \\ \vdots & & \\ a_{1R} & \cdots & a_{RR} \end{vmatrix} \neq 0$, le système est compatible ssi $\left[\forall s > R \ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1R} & b_1 \\ \vdots & & & \\ a_{R1} & \cdots & a_{RR} & b_R \\ a_{s1} & \cdots & a_{sR} & b_s \end{vmatrix} = 0 \right]$

Rmq 36 : Ces équations sont appelées équations de compatibilité, elles peuvent également être obtenues par le pivot de Gauss.

Applications 37 :
- déterminer l'intersection de noyaux de formes linéaires
- calcul du rang et liberté d'une famille
- déterminer la base d'une somme ou l'intersection de sev.
- déterminer les équations d'un sev à partir d'une famille génératrice
- déterminer une sous-famille libre maximale et les relations liant une famille de vecteurs
- calcul de l'inverse d'une matrice.
- calcul de déterminant avec complexité en $O(n^3)$.
- $SL_n(\mathbb{K})$ (resp $GL_n(\mathbb{K})$) est engendré par les transvections (resp + dilatations)

Théorème 38 : (Décomposition LU) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si tous $(a_{ij})_{1\le i,j\le k}$ sont inversibles avec $k \in [\![1,n]\!]$: $\exists!(L,U) \in \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K}) \times \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, $\operatorname{diag} L = (1)_{1\le i\le n}$, $A = LU$

Théorème 39 : (Décomposition de Cholesky) Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$: $\exists! B \in \mathcal{T}_n^-(\mathbb{R})$ $\operatorname{diag} B \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, $A = BB^t$

DEV 1

III/ Méthodes d'analyse matricielles

Dans cette partie $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1) Méthodes itératives de résolutions de systèmes linéaires

Déf 40 : Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Un couple $(M,N) \in GL_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une décomposition régulière de A si $A = M-N$.

Déf 41 : Une méthode itérative basée sur la décomposition régulière est définie par $\begin{cases} X_0 \in \mathbb{K}^n \\ MX_{k+1} = NX_k + B \quad \forall k \geq 1 \end{cases}$

Rmq 42 : Si $X_k \xrightarrow[k\to\infty]{} X$ alors $AX = B$.

Déf 43 : Une méthode itérative est convergente si :
$\forall X_0 \in \mathbb{K}^n \quad X_k \to X \quad$ et $\quad AX = B$

Théorème 44 : La méthode est convergente ssi $\rho(M^{-1}N) < 1$.

Notation 45 : On note $A = D-E-F$ où $a_{ii} \neq 0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $D = (a_{ij}\delta_{ij})_{1\le i,j\le n}$ et E (resp F) la partie triangulaire supérieure (resp. inférieure) stricte de A.

i) *Méthode de Jacobi* : $M = D$ et $N = E+F$

ii) *Méthode de Gauss-Seidel* : $M = D-E$ et $N = F$

iii) *Méthode de relaxation* : Si $\omega > 0$ $M = \frac{1}{\omega}D - E$ et $N = \frac{1-\omega}{\omega}D + F$

Théorème 46 : Si $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{K})$ alors la méthode de relaxation converge pour tout $0 < \omega < 2$.

2) Conditionnement

Déf 47 : Si $\|\cdot\|$ est une norme subordonnée, alors pour tout $A \in GL_n(\mathbb{K})$
$\operatorname{Cond}(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$. On a toujours $\operatorname{Cond}(A) \geq 1$.

Rmq 48 : Le conditionnement de A quantifie la sensibilité de la solution de $AX = B$ aux perturbations sur A et B.

Prop 49 : Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $B \neq 0$. Alors :

i) Si $AX = B$ et $A(X+\partial X) = B + \partial B$, alors $\dfrac{\|\partial X\|}{\|X\|} \leq \operatorname{Cond}(A)\dfrac{\|\partial B\|}{\|B\|}$

ii) Si $AX = B$ et $(A+\partial A)(X+\partial X) = B$, alors $\dfrac{\|\partial X\|}{\|X\|} \leq \operatorname{Cond}(A)\dfrac{\|\partial A\|}{\|A\|}$.

3) Méthode du gradient

Théorème 50 : Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ alors :
$AX_0 = B \iff X_0$ minimise $f : X \longmapsto \frac{1}{2}\langle AX, X\rangle - \langle B, X\rangle$.

Algo 51 : Soit $X_0 \in \mathbb{R}^n$ et $R_0 = B - AX_0$. Soit $\varepsilon > 0$:

- tant que $\dfrac{\|R_n\|}{\|R_0\|} \geq \varepsilon$:
  - $\alpha_{n+1} = \dfrac{\|R_n\|^2}{\langle AR_n, R_n\rangle}$; $X_{n+1} = X_n + \alpha_{n+1} R_n$; $R_{n+1} = B - AX_{n+1}$
- fin tant que.

Résultat : $\dfrac{\|R_n\|}{\|R_0\|} = \dfrac{\|B - AX_n\|}{\|B - AX_0\|} < \varepsilon$.

Théorème 52 : (Méthode du gradient à pas optimal)
L'algorithme du gradient converge vers la solution $\overline{X}$ du système $AX = B$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\|X_n - \overline{X}\| \leq \left(\frac{\operatorname{Cond}(A)-1}{\operatorname{Cond}(A)+1}\right)^n \sqrt{\operatorname{Cond}(A)}\, \|X_0 - \overline{X}\|$$

DEV 2