162

Systèmes d'équations linéaires : opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

I) Systèmes linéaires :

Soit K un corps, $n, m \in \mathbb{N}^*$.

1) Définitions :

Déf 1 : On appelle système linéaire de n équations à m inconnues $(x_1, \dots, x_m) \in K^m$ la donnée du système :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

avec $(a_{ij}) \in K$ et où $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ est appelé le second membre.

Rem 2 : Le système peut être mis sous forme matricielle $AX = B$, $A = (a_{ij})$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Ex 3 : Résolution de schémas numériques : équation de la chaleur 1D avec condition aux bords.

Def 4 : On dit qu'un système est compatible s'il admet une solution.

Ex 5 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'est pas compatible.

Prop 6 : Le système $AX = B$ est compatible ssi $B \in \mathrm{Im}(A)$

Def 7 : Le rang d'un système est le rang de sa matrice A associée.

Ex 8 : Dans l'exemple précédent, le rang du système est 2

Def 9 : Un système est dit homogène si $B = 0$

Prop 10 : Un système homogène est toujours compatible.

2) Structure de l'espace des solutions :

Def 11 : On peut voir un système de n équations à m inconnues comme un système de n formes linéaires sur $\mathbb{K}^m$.

Prop 12 : L'ensemble des solutions de $AX = 0$ est l'intersection de n noyaux de formes linéaires

Prop 13 : Pour $AX = 0$ de rang r, l'espace des solutions est de dimension $m - r$.

Rem 14 : Si $B \neq 0$ alors l'espace des solutions n'est plus un sous-espace vectoriel mais affine.

Prop 15 : Si $AX = B$ est compatible avec X_0 une solution alors l'ensemble des solutions du système est :

$X_0 + \underbrace{\{\text{Solutions de } AX = 0\}}$ de dimension $m - rg(A)$.

3) Systèmes de Cramer :

Def 16 : Un système où $A \in GL_n(K)$ est dit de Cramer

Prop 17 : Un système de Cramer admet une unique solution donnée par $X = A^{-1}B$.

Prop 18 : Si $A = (C_1 | \dots | C_n)$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ alors $\forall 1 \leq i \leq n$:

$$x_i = \frac{\det(C_1 | \dots | C_{i-1} | B | C_{i+1} | \dots | C_n)}{\det(A)}$$

Rem 19 : Méthode coûteuse, de façon naïve en $O((n+1)!)$ opérations

Ex 20 : $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a comme solution $X = \begin{pmatrix} -1/1 \\ 3/1 \end{pmatrix}$

4) Compatibilité dans le cas général

Thm 21 : (Rouché-Fontené)
Si le système est d'ordre r, quitte à changer les numérotations des inconnues / équations, on a $\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$

Alors, le système est compatible ssi : $\forall s \in [\![r+1, n]\!]$:

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & b_r \\ a_{s1} & \cdots & a_{sr} & b_s \end{vmatrix} = 0$$

Rem 22 : C'est une généralisation de Cramer.

II) Opérations élémentaires et pivot de Gauss :

1) Opérations élémentaires :

Def 23 : Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\lambda \in K^*$, $i \neq j$. On appelle matrices élémentaires :

	Dilatation	Transvection	Transposition
matrice	$D_{i,\lambda} = I + (\lambda-1)E_{ii}$	$T_{i,j,\lambda} = I + \lambda E_{ij}$	$T_{i,j} = I - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$
déterminant	λ	1	-1
action à gauche	$L_i \leftarrow \lambda L_i$	$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$	$L_i \leftrightarrow L_j$
action à droite	$C_i \leftarrow \lambda C_i$	$C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$	$C_i \leftrightarrow C_j$
inverse	$D_{i,\lambda^{-1}}$	$T_{i,j,-\lambda}$	$T_{i,j}$

Prop 24 : $GL_n(K)$ agit sur $M_{n,m}(K)$ par multiplication à gauche

Prop 25 : Deux matrices sont dans la même orbite ssi elles ont le même noyau.

Thm 26 : • $SL_n(K)$ est engendré par les transvections
• $GL_n(K)$ est engendré par les transvections et les dilatation

2) Méthode du pivot de Gauss, systèmes échelonnés :

Def 27 : Une matrice est échelonnée en ligne si :
- si une ligne est nulle, toutes les suivantes le sont.
- le premier coefficient non-nul d'une ligne est strictement plus à droite que celui de la ligne précédente. Ce coefficient est le pivot de la ligne.

Prop 28 : (méthode du pivot)
Toute matrice $A \in M_{n,m}(K)$ peut être mise sous forme échelonnée
- S'il existe un élément non-nul a_{i1} de la première colonne, on met cette ligne en premier (transposition)
  - on élimine tous les autres coefficients non-nuls (transvection)
  - on itère au sous-bloc bas
- Sinon, on applique au sous-bloc droit.

Coro 29 : Toute matrice est dans l'orbite d'une matrice échelonnée.

Rem 30 : Les systèmes échelonnés en ligne se résolvent aisément par montée

Appli 31 : Résolution de $AX = B$:
- on cherche M inversible telle que MA échelonnée
- on calcule MB
- on résout $MAX = MB$.

Appli 32 : inversion de matrices, calcul du rang / déterminant, déterminer une base de l'intersection de deux sev définis par des équations, déterminer une base de l'image et du noyau d'une application linéaire.

Rem 33 : Complexité en $O(n^3)$.

III) Autres méthodes de résolution :

1) Méthodes directes :

Thm 34 : (Choleski)
Soit $A \in M_n(K)$ hermitienne, définie positive. Alors il existe une matrice triangulaire supérieure R telle que : $A = R^* R$.
Elle est unique si les coefficients diagonaux sont positifs.

Rem 35 : La factorisation de Choleski simplifie le système car cela revient à résoudre deux systèmes échelonnés.

Thm 36 : (Décomposition QR). Soit $A \in GL_n(K)$, alors il existe une matrice unitaire Q, une matrice triangulaire R telle que $A = QR$. Si $(R_{i,i}) > 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$ alors une telle décomposition est unique.

Prop 37 : (Méthode QR) [DVPT 1]
Soit $A \in GL_n(K)$ de valeurs propres : $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n| > 0$. Il existe P inversible telle que $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, on suppose que P^{-1} admet une décomposition LU. On définit $(A_k)_{k \geq 1}$ comme :

$A_1 = A = Q_1 R_1$; $A_2 = R_1 Q_1 = Q_2 R_2$; ... ; $A_{k+1} = R_k Q_k = Q_{k+1} R_{k+1}$

alors : $\lim_{k \to +\infty} (A_k)_{i,i} = \lambda_i$ et $\lim_{k \to +\infty} (A_k)_{i,j} = 0$, $1 \leq j < i \leq n$.

2) Méthodes indirectes :

Def 38 : On écrit $A = M - N$ avec M facile à inverser.
$AX = B \Leftrightarrow MX = NX + B \Leftrightarrow X = M^{-1}NX + M^{-1}B \Leftrightarrow X = F(X)$
On note $X_{k+1} = F(X_k)$.

Def 39 : La méthode converge si $\forall B \in K^n$, $\forall X_0 \in K^n$, la suite (X_k) converge vers la solution $x = A^{-1}B$.

Thm 40 : Il y a équivalence entre :
(i) Pour une norme matricielle subordonnée quelconque, on a $\lim_{k \to +\infty} \|(M^{-1}N)^k\| = 0$
(ii) $\forall v \in K^n$, $\lim_{k \to +\infty} (M^{-1}N)^k v = 0_{K^n}$
(iii) $\rho(M^{-1}N) < 1$
(iv) Il existe une norme matricielle subordonnée telle que $\|M^{-1}N\| < 1$.

Def 41 : (méthode de Jacobi) $A = \underset{\text{diagonale}}{D} - \underset{\text{sous-diagonale}}{E} - F$ ← sur-diagonale
On pose $M = D$ et $N = E + F$

Thm 42 : Soit $A \in M_n(K)$ à diagonale strictement dominante. Alors la suite (X_k) converge vers la solution, $\forall X_0 \in K^n$

Contre-ex 43 : $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$ pour $a \in]\frac{1}{2}, 1[$ la méthode est bien définie mais ne converge pas.

Def 44 : (Gauss-Seidel) $A = D - E - F$, $M = D - E$, $N = F$

Thm 45 : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive. Alors $\forall X_0 \in K^n$, la méthode de Gauss-Seidel est bien définie et converge vers la solution du système.

Thm 46 : (Gradient à pas optimal) [DVPT 2]
Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ où $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$
$x \longmapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle$

Il existe une unique solution $\bar{x}$ au problème de minimisation de f. Elle est caractérisée par $\nabla f(\bar{x}) = 0$.
De plus, l'algorithme défini par : $\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ \forall k \in \mathbb{N}, x_{k+1} = x_k + t_k d_k \end{cases}$

où $\begin{cases} d_k = -\nabla f(x_k) \\ t_k \text{ l'unique réel minimisant } t \longmapsto f(x_k + t d_k) \end{cases}$

converge vers $\bar{x}$.