162

Systèmes d'équations linéaires, opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences

Dans ce cours, $\mathbb{K}$ désigne un corps.

I - Systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{K}^n$

1) Définitions

Définition 1 Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, $(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}} \in \mathbb{K}^{np}$ et $(b_i)_{1\le i\le n} \in \mathbb{K}^n$. Résoudre un <u>système d'équations linéaires</u> correspond à la recherche de $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Proposition 2 Un tel système peut s'écrire matriciellement $Ax = b$ où $A := (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $b = (b_i)_{1\le i\le n} \in \mathbb{K}^n$.

Définition 3 Si $b = 0$, on parle de <u>système homogène</u>.

Définition 4 Si $n < p$, on parle de <u>système sur-déterminé</u>. Si $n > p$, on parle de <u>système sous-déterminé</u>.

Exemple 5 Dans $\mathbb{R}$, $\begin{cases} 2x + y + 5z = 1 \\ x + 4y - 3z = -1 \end{cases}$ est sous-déterminé et $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - 4y = 7 \\ 28x + 7y = \sqrt{2} \end{cases}$ est sur-déterminé.

Proposition 6 La recherche de solutions d'un système d'équations linéaires homogène est équivalent à la recherche de l'intersection de n hyperplans.

2) Structure des solutions

Proposition 7 Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $b \in \mathbb{K}^n$. Un système $Ax = b$ admet au moins une solution <u>ssi</u> $b \in \mathrm{Im}(A)$. En particulier, $Ax = 0$ admet toujours au moins une solution.

Proposition 8 Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $x_0 \in \mathbb{K}^p$ et $b \in \mathbb{K}^n$ tels que $Ax_0 = b$. L'ensemble S des solutions de $Ax = b$ est donné par $S = x_0 + \mathrm{Ker}(A)$. C'est un espace affine de direction $\mathrm{Ker}(A)$.

Exemple 9 $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Alors $b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \mathrm{Im}(A)$ donc $Ax = b_1$ n'admet pas de solutions.
$b_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(A)$ donc $Ax = b_2$ admet des solutions $S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Définition 10 (Cas où $b \notin \mathrm{Im}(A)$) Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. On dit que $x \in \mathbb{R}^p$ est solution de $Ax = b$ au sens des moindres carrés <u>ssi</u> $\|Ax - b\|^2 = \min_{\xi \in \mathbb{R}^p} \|A\xi - b\|^2$

Proposition 11 Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. $x \in \mathbb{R}^p$ est solution de $Ax = b$ au sens des moindres carrés <u>ssi</u> ${}^tAAx = {}^tAb$ (équation normale)

Exemple 12 Dans le cadre de l'exemple 9, pour b_1, l'équation normale est ${}^tAAx = {}^tAb_1 \iff \begin{pmatrix} 13 & 26 \\ 26 & 52 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/13 \end{pmatrix}$ est alors solution au sens des moindres carrés de $Ax = b_1$.

3) Systèmes de CRAMER

Proposition 13 Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $b \in \mathbb{K}^n$. <u>EQU</u>:
(i) $Ax = b$ admet une unique solution
(ii) A est inversible.

Dans ce cas, on est en présence d'un système dit <u>de CRAMER</u> de solution $x = A^{-1}b$. La solution s'exprime aussi par $x_j = \frac{1}{\det(A)} \Delta_j$ où Δ_j est le déterminant de la matrice A où on a remplacé la j^e colonne par b.

Corollaire 14 <u>Cas d'une matrice triangulaire supérieure</u>
Si $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire supérieure, et $b \in \mathbb{K}^n$, $Ux = b$ admet une unique solution <u>ssi</u> $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $u_{kk} \neq 0$.
La solution est donnée dans ce cas par récurrence $x_n = \frac{b_n}{u_{nn}}$ et $\forall j \in [\![1, n-1]\!]$, $x_j = \frac{1}{u_{jj}}\left(b_j - \sum_{k=j+1}^{n} u_{jk} x_k\right)$

Exemple 15 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ admet une unique solution donnée par $\begin{cases} x_1 = 1 - 2x_2 - 2x_3 \\ x_2 = 1/4(1 - x_3) \\ x_3 = 1/5 \end{cases} \iff x = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Application 16 Si $a, b, c \in \mathbb{C}$ sont complexes, et $u \in \mathbb{C}^3$, le système $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} z = u$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}^3$ admet une unique solution dans $\mathbb{C}^3$ <u>ssi</u> a, b, c sont distincts.

4) Cas général : théorème de ROUCHÉ-FONTENÉ

Définition 17 Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r et $b \in \mathbb{K}^n$. A admet un déterminant mineur de taille r $\delta := |(a_{ij})_{\substack{i\in I\\ j\in J}}|$.
On appelle déterminants caractéristiques associés à δ et à b la famille $\{\Delta_s\}_{s \in [\![1,n]\!] \setminus I}$ de scalaires donnés par

$$\Delta_s \overset{\text{déf}}{=} \left| \begin{array}{c|c} (a_{ij})_{\substack{i\in I\\ j\in J}} & (b_i)_{i\in I} \\ \hline (a_{sj})_{j\in J} & b_s \end{array} \right|$$

Théorème 18 (Rouché-Fontené) Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $b \in \mathbb{K}^n$. Le système $Ax=b$ admet des solutions ssi les déterminants caractéristiques associés à S, le déterminant mineur de A de taille $r=rg(A)$, et à b sont nuls. Dans ce cas, les solutions forment un espace affine de dimension $n-r$.

II - Opérations élémentaires - Matrices échelonnées - Pivot de Gauss

① Opérations élémentaires

Définition 19 Pour $i \neq j$ et $n \geq 2$, on définit les matrices élémentaires.

NOM	Dilatation	Transvection	Permutation
MATRICE	$D_{i,\lambda} = I_n + (\lambda-1)E_{ii}$	$T_{i,j,\lambda} = I_n + \lambda E_{ij}$	$P_{ij} = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$
DÉTERMINANT	λ	1	-1
ACTION À GAUCHE	$L_i \leftarrow \lambda L_i$	$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$	$L_i \leftrightarrow L_j$
ACTION À DROITE	$C_i \leftarrow \lambda C_i$	$C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$	$C_i \leftrightarrow C_j$
INVERSE	$D_{i,\lambda^{-1}}$	$T_{i,j,-\lambda}$	P_{ij}

Proposition 20 Soit M une matrice élémentaire. Alors X est solution de $AX=b$ ssi X est solution de $MAX=Mb$.

Remarque 21 Autrement dit, tout système linéaire est équivalent au système où : on multiplie une ligne par un scalaire non nul ; on permute deux lignes ; on fait une combinaison linéaire des lignes.

② Pivot de Gauss

Définition 22 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La matrice A est dite échelonnée si A est composée, par ordre croissant d'indice de ligne, de lignes non nulles qui commencent par un nombre strictement croissant de zéros et de lignes nulles.

Exemples 23 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ne l'est pas.

Proposition 24 Toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ peut se mettre sous forme échelonnée par l'action de matrices élémentaires à gauche : il existe $P_1, \dots, P_k$ élémentaires telles que $P_1 \cdots P_k A$ soit échelonnée.

Remarque 25 La mise sous forme échelonnée se fait à l'aide du pivot de Gauss, détaillée en annexe, de complexité $O(n^3)$.

Remarque 26 Dans le cas où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il s'agit d'une mise sous forme triangulaire supérieure, cas résolu au corollaire 14.

Proposition 27 L'ensemble $SL_n(\mathbb{K})$ des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ de déterminant 1 est engendré par les transvections. $GL_n(\mathbb{K})$ est engendré par les transvections et les dilatations.

Application 28 Soit $p \geq 3$ un nombre premier. Il existe p morphismes de groupes $\varphi : GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ donnés par $\alpha_k \circ \det$ pour $1 \leq k \leq p$ où $\alpha_k : \left(\begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* & \to & (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \\ x & \mapsto & x^k \end{array} \right)$

Théorème 29 (Factorisation LU) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. EQU

(i) Pour tout $1 \leq k \leq n-1$, la sous-matrice extraite A_k de A est inversible (i.e. $(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq k} \in GL_k(\mathbb{K})$)

(ii) Il existe un unique couple $(L,U) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ où L est triangulaire inférieure composée que de 1 sur la diagonale et U une matrice triangulaire supérieure telles que $A = LU$.

Remarque 30 Une telle décomposition transforme $Ax=b$ en $\begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$, i.e. en deux systèmes triangulaires.

Remarque 31 Il faut environ $\frac{2n^3}{3}$ opérations pour résoudre $Ax=b$ grâce à LU, ce qui est nettement mieux que $O(n!)$ à l'aide des formules de CRAMER.

Théorème 32 (Factorisation de Cholesky) Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Il existe une unique matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs telle que $A = {}^tB\,B$. [DVP 1]

Application 33 (du pivot de Gauss) Extraction d'une base d'une famille génératrice ; compléter une famille libre en base, détermination d'un supplémentaire, détermination d'une base de $F+G$, de $F\cap G$.

III – Résolutions numériques

① Méthode directe

Proposition 34 (Factorisation QR) Soit $A\in GL_n(\mathbb{R})$. Il existe un unique couple $(Q,R)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ tel que Q soit orthogonale, R triangulaire supérieure avec ses coefficients diagonaux strictement positifs et $A=QR$.

Remarque 35 Une telle décomposition transforme $Ax=b$ en $\begin{cases} y={}^tQb \\ Rx=y\end{cases}$ i.e. un calcul de transposée et un système triangulaire.

② Itérations par décomposition régulière

Définition 36 Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. Un couple $(M,N)\in GL_n(\mathbb{R})\times\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie $A=M-N$ est appelé décomposition régulière ou splitting. L'itération par cette décomposition consiste à prendre $x_0\in\mathbb{R}^n$ et

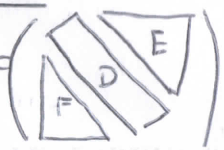
$$\forall k\in\mathbb{N},\quad Mx_{k+1}\overset{\text{def}}{=}Nx_k+b.$$

Remarque 37 Cette décomposition n'est intéressante que si M est plus « facilement » inversible que A (diagonale, orthogonale, triangulaire...)

Théorème 38 Soit $A\in GL_n(\mathbb{R})$ muni d'une décomposition régulière $A=M-N$. L'itération converge ssi

$$\rho(M^{-1}N)=\max\{|\lambda|\mid\lambda\in Sp(M^{-1}N)\}<1.$$

Proposition 39 Soit $A\in GL_n(\mathbb{R})$. On note

$A=$ 

MÉTHODE	M	N	CONVERGE LORSQUE...
Jacobi	D	$D-A$	* A à diagonale dominante * $(A, 2D-A)\in(S_n^{++}(\mathbb{R}))^2$
Gauss Seidel	$D-E$	F	* $A\in S_n^{++}(\mathbb{R})$
SOR	$\frac{1}{\omega}D-E$	$\frac{1-\omega}{\omega}D+F$	* $\omega\in]0,2[$

③ Méthode de gradient

Lemme 40 – (Inégalité de Kantorovitch) Soit $A\in S_n^{++}(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_n>0$ son spectre par ordre décroissant. Alors, $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $\langle Ax,x\rangle\langle A^{-1}x,x\rangle\leq\frac{1}{4}\left[\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}}+\sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}}\right]^2\|x\|^4$

Théorème 41 – (Gradient à pas optimal) Soit $f:\begin{pmatrix}\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}\\ x\longmapsto\frac{1}{2}\langle Ax,x\rangle-\langle b,x\rangle\end{pmatrix}$ où $A\in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $b\in\mathbb{R}^n$.

Pour tout $x_0\in\mathbb{R}^n$, la suite définie par :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad x_{k+1}\overset{\text{def}}{=}x_k-t_k\nabla f(x_k)$$

où $t_k\in\mathbb{R}$ est l'unique réel tel que $f(x_k-t_k\nabla f(x_k))=\min_{t\in\mathbb{R}}\{f(x_k-t\nabla f(x_k))\}$ converge vers x^*, l'unique solution de $Ax^*=b$. Plus précisément : il existe $C>0$ et $0<\lambda<1$ tels que

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad\|x_k-x^*\|\leq C\lambda^k.$$

[DVP2]

Références J. Grifone, Algèbre linéaire
X. Gourdon, Algèbre

DVP 1 [G. Allaire, S. Kaber, Numerical Linear Algebra
A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri, Méthodes numériques
C. Deschamps, F. Moulin, A. Warusfel, Maths MPSI

Prop 27/28 [S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, Algèbre 2 X/ENS

DVP 2 [J.B Hiriart-Urruty, Optimisation et analyse convexe.

Annexe 1 : algorithme du pivot de GAUSS

Entrée : $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Échanger dernières lignes et lignes nulles

Pour $i = 1, \dots, n-1$

  pivot $= a_{i,i}$

  indice $= i$

  Pour $j = i+1, \dots, n$:

    Si pivot $= 0$:

      pivot $= a_{ij}$

      indice $= j$

  Si pivot $\neq 0$: (pivot $\neq 0 \Leftrightarrow$ ligne non nulle)

    $C_i \longleftrightarrow C_{indice}$

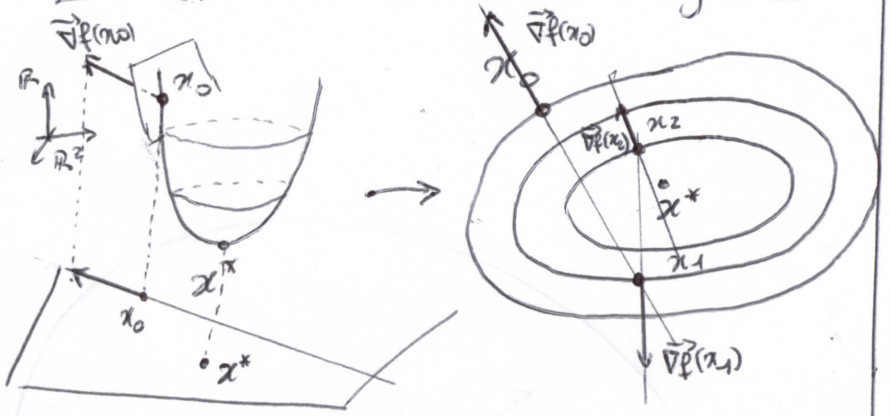
    Pour $k = i+1, \dots, n$:

      $m_{k,i} = \dfrac{a_{k,i}}{\text{pivot}}$

      $L_k \leftarrow L_k - m_{k,i} L_i$

Sortie : Matrice triangulaire supérieure équivalente à A.

Annexe 2 : Illustration méthode de gradient



Pas optimal. $\vec{\nabla} f(x_k) \cdot \vec{\nabla} f(x_{k+1}) = 0$