131 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie - Orthogonalité, isotropie, applications

Cadre : E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ corps de caractéristique $\neq 2$)
$B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E

I) Généralités

RI 289

Def 1 : $s : E \times E \to \mathbb{K}$ est dite bilinéaire symétrique si $\forall x, y, z \in E$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $s(x,y) = s(y,x)$
$s(\lambda x + \mu y, z) = \lambda s(x,z) + \mu s(y,z)$

Def 2 : $q : E \to \mathbb{K}$ est dite quadratique si $\forall x \in E$, $q(x)$ est un polynôme homogène de degré 2 en les coordonnées de x dans B.

Rque : $s : E \times E \to \mathbb{K}$ bilinéaire symétrique, alors $q : x \in E \mapsto s(x,x) \in \mathbb{K}$ est une forme quadratique

Proposition 3 : Réciproquement, à chaque forme quadratique q correspond une unique forme bilinéaire symétrique s tq $s(x,x) = q(x)$.
s est appelée forme polaire de q et

$$s(x,y) = \frac{1}{2}\left(q(x+y) - q(x) - q(y)\right)$$

Ex : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \mathrm{Tr}({}^tA.A)$ est une forme quadratique, sa forme polaire : $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \mathrm{Tr}({}^tA.B)$

Def 4 : À $s : E \times E \to \mathbb{K}$ bilin sym on associe $\varphi : E \to E^*$, $x \mapsto s(x, \cdot)$

Def 5 : On appelle matrice de s la matrice $M(s)_B = (s(e_i, e_j))_{1 \le i,j \le n}$

Rque : Si $x = \sum x_i e_i$, $y = \sum y_i e_i$ on a $s(x,y) = {}^tXMY$ avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Si $B' = (e_i')_{1 \le i \le n}$ autre base de E, on a $M(s)_{B'} = {}^tPM(s)_BP$ avec P matrice de passage de B à B'

Proposition 6 : En notant B^* la base duale de B on a $(M(\varphi))_{BB^*} = M(s)_B$

Def 7 : $\mathrm{rang}(q) := \mathrm{rang}(s) := \mathrm{rang}(\varphi) = \mathrm{rang}\, M(s)_B$
$\mathrm{noyau}(q) = \mathrm{radical}(s) := \mathrm{noyau}(\varphi)$
q non-dégénérée si s non dégénérée i.e φ inj.

Def 8 : q définie si $(q(x) = 0) \Leftrightarrow (x = 0)$
si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, q positive si $q(x) \geq 0$ $\forall x \in E$

Rque : définie $\Rightarrow$ non-dégénérée
équivalence si q est positive

Ex : $q : x \in \mathbb{R}^2 \mapsto x_1^2$ dégénérée
$\hookrightarrow s(x,y) = x_1 y_1$
$q : x \in \mathbb{R}^2 \mapsto x_1^2 + x_2^2$ définie
$q : x \in \mathbb{R}^2 \mapsto x_1^2 - x_2^2$ non-dégénérée mais non définie : $q\binom{1}{1} = 0$
$\hookrightarrow s(x,y) = x_1 y_1 - x_2 y_2$

II) Orthogonalité et isotropie

1) ORTHOGONALITE

Def 1 : $x, y \in E$ sont dits orthogonaux pour la forme bilinéaire symétrique s si $s(x,y) = 0$.

Def 2 : A sous-ensemble de E, on appelle orthogonal de A : $A^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in A, s(x,y) = 0\}$

Propriétés : $\{0\}^\perp = E$, $E^\perp = N(s)$, $\forall A \subset E$ $N(s) \subset A^\perp$
si F sev : $n = \dim(F) + \dim(F^\perp) - \dim(F \cap N(s))$

Def 3 : La base B est dite q-orthogonale si pour $i \neq j$ e_i et e_j sont orthogonaux pour la forme polaire de q.

Rque : Chercher une telle base revient à chercher

131 : formes quadratiques — formes B p43 — 130

GOB p246

$P \in GL_n(\mathbb{K})$ tq ${}^tP M(s)_B P$ soit diagonale, et la forme quadratique est alors combinaison linéaire des carrés des formes coordonnées.

GRI p300

<u>Théorème 4</u>: Pour toute forme quadratique q sur E, il existe une base q-orthogonale.

ON EN TROUVE PAR LA METHODE DE GAUSS

METHODE DE GAUSS : Pour toute forme quadratique q il existe $r = \text{rang}(q)$ formes linéaires indépendantes $l_1, \dots, l_r$ tq $q = \sum_{i=1}^{r} a_i l_i^2$, $a_i \in \mathbb{K}$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$

ALGORITHME : On utilise

$* \ a^2 + 2ab = (a+b)^2 - b^2$ $\quad * \ ab + aS + bR = (a+R)(b+S) - RS$

$* \ 4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2$

Ex : $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_3x_1$

$= [x_1 - (x_2+x_3)]^2 - (x_2+x_3)^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3$

$= [x_1 - (x_2+x_3)]^2 - 4x_2x_3$

$= [x_1 - (x_2+x_3)]^2 - (x_2+x_3)^2 - (x_2-x_3)^2$

$q(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = (x_1+x_3)(x_2+x_3) - x_3^2$

$= \frac{1}{4}(x_1+x_2+2x_3)^2 - \frac{1}{4}(x_1-x_2)^2 - x_3^2$

…équence de …uclidien, …S(E) admet … base $\perp$ de $\vec{vp}$ …sible …uction des … auto-adj.

<u>Théorème 5</u> : Pseudo-réduction simultanée

Soient q une forme quadratique définie positive et q' f.q quelconque. Alors il existe une base orthogonale à la fois pour q et q'.

DL 1	Application : Ellipsoïde de John Loewner
K compact de $\mathbb{K}^n$ d'intérieur non-vide $\exists!$ ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K.	

2) ISOTROPIE

<u>Def 6</u> : $x \in E$ est dit isotrope pour q si $q(x) = 0$

<u>Def 7</u> : F sev de E est dit isotrope si $q|_F$ est dégénérée i.e $F \cap F^\perp \neq \{0\}$; et totalement isotrope si $F \subset F^\perp$ (SETI)

GOU p230

<u>Propriétés</u> : F SETI alors $\dim(F) \leq n - \frac{\text{rang}(q)}{2}$

Tout SETI est inclus dans un SETI max

On suppose q non-dégénérée (on peut toujours s'y ramener en quotientant par $N(q)$) alors tous les SETI max ont même dimension appelée indice de q ($\nu(q)$)

<u>Def 8</u> : Etant donné q forme quadratique sur E on appelle cône isotrope $I(q) = \{x \in E \mid q(x) = 0\}$

<u>Propriétés</u> : $N(q) \subset I(q)$

Equivalence (i) $N(q) \neq I(q)$

(ii) $I(q)$ engendre E comme ev

(iii) $\forall x \in E$, $q(x) = 0$ ou $x = y + z$ avec $y, z \in I(q)$

GOB p253

APPLICATION

<u>Proposition 9</u> : $s : E \times E \to \mathbb{K}$ bilin symétrique tq $N(s) \neq I(s)$. s' bilin symétrique est proportionnelle à s ssi $I(s) = I(s')$.

III) <u>Réduction et classification des f.q</u>

<u>Def 1</u> : Deux formes quadratiques q et q' sont équivalentes si elles sont dans la même orbite pour l'action à droite de $GL(E)$ sur l'ensemble des formes quadratiques définie par $q \cdot p = q \circ p$

GOB p263

$q' = q \circ p \Leftrightarrow M(s') = {}^tP M(s) P$

<u>Proposition 2</u> : On a des invariants pour cette relation d'équivalence : le rang, l'indice et le discriminant

Théorème 3 : $\mathbb{K}$ algébriquement clos.
Si q est de rang r alors q est équivalente à la forme $x_1^2 + \dots + x_r^2$

Théorème 4 : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, théorème de Sylvester
Si q est de rang r alors q est équivalente à $x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2$ où p ne dépend que de q.
Le couple $(p, r-p)$ est appelé signature de q.
- $p = \max$ des dimensions de sous-espaces sur lesquels q est définie positive
- dans le cas non dégénéré si la signature est (s,t) alors l'indice est le min de s et t

Ex $q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax^2 + bxy + cy^2$, $a > 0$
$$= \left(\sqrt{a}\,x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\,y\right)^2 + \left(-\frac{b^2}{4a} + c\right) y^2$$
$\Delta = b^2 - 4ac$
q de signature $(1,0)$ si $\Delta = 0$
$(1,1)$ si $\Delta > 0$
$(2,0)$ si $\Delta < 0$

Théorème 5 : $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$. Soit $\alpha \in \mathbb{F}_q^{\times} \setminus \mathbb{F}_q^{\times 2}$. Si q est non-dégénérée alors q est équivalente à
$$x_1^2 + \dots + x_n^2 \quad \text{ou} \quad x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + \alpha x_n^2$$
- $x \in \mathbb{F}_q^{\times}$ est un carré ou $x = \alpha y$ avec y carré
  $\alpha x^2 + \alpha y^2 = 1$ a une solution (x,y) dans $\mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q$

IV) Applications à la géométrie

1) CLASSIFICATION DES CONIQUES

On procède à la classification affine des coniques $\mathcal{C} : q(x,y) + 2\ell(x,y) + c = 0$ avec q f.q $\neq 0$, ℓ linéaire et c constante

On définit la forme quadratique homogénéisée Q par $Q(x,y,z) = q(x,y) + 2z\ell(x,y) + cz^2$.
On dit que $\mathcal{C}$ est propre si Q est non-dégénérée et on peut classifier les coniques propres à partir des signatures de Q et q.

Q	q	conique
$(3,0)$	$(2,0)$	$\emptyset$
$(2,1)$	$(1,1)$	hyperbole
	$(1,0)$	parabole
	$(2,0)$	ellipse

2) GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

Recherche d'extrema : ROU p370

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $a \in \mathbb{R}^n$ un point critique de f. Soit q la f.q de matrice la matrice Hessienne de f en a.
- si f admet un minimum (resp un max) relatif en a alors q est positive (resp négative).
- si q est définie positive (resp définie négative) alors f admet un minimum (resp max) relatif strict en a
- si q n'est ni positive, ni négative alors f n'admet pas d'extremum local en a.

DL2 Lemme de Morse

U ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0. $f : U \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^3$.
On suppose $df(0) = 0$ et $d^2f(0)$ non-dégénérée de signature $(p, n-p)$. Alors il existe un $\mathcal{C}^1$ difféo φ entre deux voisinages de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tq $\varphi(0) = 0$ et en posant $u = \varphi(x)$,
$$f(x) - f(0) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2$$