Leçon 131 : Formes quadratiques dans un e.v. de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Exemples et applications.

[GOU] On se place dans E, un espace vectoriel de dimension finie n, sur $\mathbb{K}$, un corps de caractéristique $\neq 2$.

I) Généralités

Déf 1 : $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ est une forme bilinéaire symétrique (f.b.s) si $\forall x \in E$, $\varphi(x,\cdot) : y \mapsto \varphi(x,y)$ est linéaire et $\forall (x,y) \in E^2$, $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$

Déf 2 : [GRI] $q : E \to \mathbb{K}$ est une forme quadratique si $\forall x \in E$, $q(x)$ est un polynôme homogène de degré 2 en les coordonnées de x dans une base de E.

Prop 3 : * Soit φ une f.b.s, alors $q : E \to \mathbb{K}$ défini par $q(x) = \varphi(x,x)$ est une forme quadratique (fq)

* Réciproquement, soit q une forme quadratique sur E, alors il existe une unique f.b.s φ tq $\forall x \in E$, $q(x) = \varphi(x,x)$. Elle est définie par :
$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\left[q(x+y) - q(x) - q(y)\right]$
C'est la forme polaire de q

Ex : * Sur $\mathbb{R}^2$, $q(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - x_1x_2$ a pour forme polaire : $\varphi(x,y) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 - \frac{x_1y_2}{2} - \frac{x_2y_1}{2}$

[GOU] * $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to tr({}^tAA)$ est une fq. de forme polaire $\varphi(A,B) \mapsto tr({}^tAB)$

Déf 4 : On appelle matrice de la f.q q dans une base $\mathcal{B} = (e_1 .. e_n)$ la matrice de la forme polaire φ, définie par $M(\varphi)_{\mathcal{B}} = \left(\varphi(e_i, e_j)\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ [GOU]

Rq : On a alors $\varphi(x,y) = {}^tXMY$ où X et Y sont les vecteurs des coordonnées de x et y dans $\mathcal{B}$.

Prop 5 : Si $\mathcal{B}' = (e_i')_{1 \leq i \leq n}$ est une autre base de E.
$M(\varphi)_{\mathcal{B}'} = {}^tP\, M(\varphi)_{\mathcal{B}}\, P$
où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Prop 6 : L'application $\varphi \mapsto M(\varphi)_{\mathcal{B}}$ dans une base $\mathcal{B}$ fixée de E est un isomorphisme de l'ensemble des f.b.s sur E dans l'ensemble des matrices symétriques de taille n.

Csq : L'ensemble des f.b.s sur E est de dim $\frac{n(n+1)}{2}$

Déf 7 : * Le rang de q est défini comme le rang de la matrice de q : $rg(q) = rg(M(\varphi))$ [GRI]

* Le noyau de q est : $N(q) = \{y \in E \mid \forall x \in E, \varphi(x,y) = 0\}$

Rq : Ce n'est pas $\{x \in E \mid \varphi(x,x) = q(x) = 0\}$ qui n'est pas un e.v en général.

Déf 8 : * q est non dégénérée si $N(q) = \{0\}$

* q est définie si $q(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

Prop 9 : q définie $\Rightarrow$ q non dégénérée

Ex : Réciproque fausse : $q(x) = x_1^2 - x_2^2$ est non dégénérée car sa matrice est de det $\neq 0$ mais $q(t,-t) = 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$ [GOU]

II) Orthogonalité et isotropie

1) Orthogonalité

[GOU] **Déf 1** : $x, y \in E$ sont dits orthogonaux selon la f.b.s φ si $\varphi(x,y) = 0$.

Déf 2 : $A \subset E$. On appelle orthogonal de A selon φ (ou q) l'ensemble $A^\perp = \{y \in E \,/\, \forall x \in E, \varphi(x,y) = 0\}$

Ex : • $\{0\}^\perp = E$ et $E^\perp = N(q) = N(\varphi)$
• $\forall A \subset E$, $N(q) \subset A^\perp$

Prop 3 : Si F s.e.v de E,
i) $\dim F + \dim F^\perp = \dim E + \dim(F \cap N(\varphi))$
ii) $F^{\perp\perp} = F + N(\varphi)$

Déf 3 : Une base B de E est dite q-orthogonale si $\forall (e, e') \in B$, $\varphi(e, e') = 0$ où φ f.b.s associée à q.

Rq : la matrice de q dans une telle base est diagonale.

Prop 4 : Pour toute f.q q, il existe une base q-orthog. de E.

[GOU] **Appl** : Méthode de Gauss : écrire q comme combinaison linéaires de carrés de formes linéaires indépendantes.

Ex : Sur $\mathbb{R}^2$, $q(x) = x^2 + 2xy + 2y^2 = (x+y)^2 + y^2$

Donc si (e_1, e_2) est la base canonique de $\mathbb{R}^2$, la matrice de q est diagonale dans la base ~~(e_1+e_2, e_2)~~ $(e_1, e_2 - e_1)$

[AUD] **Prop 5** : Pseudo-réduction simultanée : si q est une f.q définie positive et q' une f.q quelconque, alors il existe une base orthogonale pour q et q'.

Appl : Ellipsoïde de John-Loewner **DVP 1** [FGN]

K compact de $\mathbb{R}^n$ d'intérieur non vide, alors il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K

2) Isotropie

[GRI] **Déf 6** : $x \in E$ est dit isotrope si $q(x) = 0$
$I(q) = \{x \in E \,/\, q(x) = 0\}$ est le cône isotrope de q.

Rq : $I(q)$ n'est pas un s.e.v en général mais un cône.

Ex : Sur $\mathbb{R}^2$, $q(x) = x_1^2 - x_2^2$
$I(q)$ est égal à l'ensemble des deux bissectrices de $\mathbb{R}^2$.

Déf 7 : Un s.e.v F de E est isotrope si $F \cap F^\perp \neq \{0\}$ et est totalement isotrope si $F \subset F^\perp$

Ex : Si x est isotrope, $\mathbb{K}x$ est un s.e.v totalement isotrope.

Prop 8 : $N(q) \subset I(q)$

Rq : Un s.e.v peut contenir des vecteurs isotropes sans être isotrope : sur $\mathbb{R}^3$, $q(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ et $F = \{x \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 = 0\}$

III Réduction des f.q

[PER] **Déf 1** : Deux f.q q et q' sont équivalentes s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$, tq $M' = {}^tPMP$.

[GRI] **TR2** : $\mathbb{K}=\mathbb{R}$: théorème de Sylvester

Si q est de rang n, alors q est équivalente à $x_1^2+\dots+x_p^2-x_{p+1}^2-\dots x_n^2$ où p ne dépend pas de la base.

Le couple $(p, n-p)$ est la signature de q.

Rq : * Si $n=m$, q est non dégénérée

* Si la signature est de la forme $(p,0)$, q est positive (càd $q(x)\geq 0$ $\forall x\in E$)

Ex : Sur $\mathbb{R}^2$, $q(x)=ax^2+bxy+cy^2$, $a>0$

Posons $\Delta=b^2-4ac$. Alors q a pour signature :

* $(1,0)$ si $\Delta=0$
* $(2,0)$ si $\Delta<0$
* $(1,1)$ si $\Delta>0$

[GRI] **TR3** : $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ (ou plus généralement $\mathbb{K}$ alg. clos)

Si q est de rang n, alors q est équivalente à
$$x_1^2+\dots+x_n^2$$

[PER] **TR4** : $\mathbb{K}=\mathbb{F}_p$ de caract $\neq 2$, et soit $\alpha\in\mathbb{F}_p^\times\setminus\mathbb{F}_p^{\times 2}$

Si q est non dégénérée, q est équivalente à $x_1^2+\dots+x_n^2$ ou $x_1^2+\dots+x_{n-1}^2+\alpha x_n^2$ selon que $\det(M(q))$ soit un carré ou non dans $\mathbb{F}_p^*$.

IV) Applications à la géométrie

1) Classification des coniques

[BER] + [AUD]

Les coniques ont pour équation : $q(x,y)+2l(x,y)+c=0$ où q tq $q\neq 0$, l linéaire et c constante.

La forme quadratique homogénéisée est définie par :
$Q(x,y,z)=q(x,y)+2z\,l(x,y)+cz^2$.

La conique est dite propre si Q est non dégénérée.

L'équation des coniques propres peut se mettre sous la forme :
(I) $a_1x_1^2+a_2x_2^2+1$ ou (II) $a_1x_1^2+2x_2$

On peut donc classer les coniques propres selon la signature de q :

I$(2,0)\to\emptyset$ I$(1,1)\to$ hyperbole

I$(0,2)\to$ ellipse II $(1,0)\to$ parabole

2) Géométrie différentielle

[ROU]

* Soit $f:U\to\mathbb{R}$ de classe C^2 et a un point critique de f. (U ouvert de $\mathbb{R}^m$)

Notons q la hessienne de f en a.

* si f admet un min (resp max) local en a, alors q est positive (resp. négative)
* si q est définie positive (resp. déf négative), alors f admet un min (resp max) local strict en a.

* Lemme de Morse : **DVP 2** : Soit $f:U\to\mathbb{R}$ de classe C^3 où U ouvert de $\mathbb{R}^m$ contenant 0. Si $Df(0)=0$ et $D^2f(0)$ tq non dégénérée de signature $(p,m-p)$, et $\varphi: x\mapsto \varphi(x)=0$ C^1 difféomorphisme entre deux voisinages de 0 tq $\varphi(0)=0$ et
$$f(x)-f(0)=u_1^2+\dots+u_p^2-u_{p+1}^2-\dots-u_m^2$$

Références :

[GRI] : GRIFONE : Algèbre linéaire

[GOU] : GOURDON : ALGÈBRE

[PER] : PERRIN : Cours d'algèbre

[FGN] : Francinou, Gianella, Nicolas : Oraux X-ENS algèbre 3

[ROU] : Rouvière : petit guide de calcul différentiel

[AUD] : Michèle Audin : Géométrie

[BER] : Marcel Berger : Géométrie 2