171 - Formes quadratiques réelles.
Exemples et Applications

Cadre : E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n.

① Définitions et premières propriétés

1) Formes bilinéaires symétriques

[GOU2] p 223

Def 1 : Soit $\varphi : E\times E \to \mathbb{R}$, $(x,y)\mapsto \varphi(x,y)$. On dit que φ est bilinéaire si :
- $\forall x\in E$, $y\mapsto \varphi(x,y)$ est linéaire
- $\forall y \in E$, $x\mapsto \varphi(x,y)$ est linéaire.

Ecriture matricielle : Soit $B=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. Alors pour tout $x=\sum_{i=1}^n x_ie_i$, $y=\sum_{i=1}^n y_ie_i$,
$\varphi(x,y)=\sum_{i,j=1}^n x_iy_j\varphi(e_i,e_j) = {}^tXMY$ où $M=(\varphi(e_i,e_j))\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$.

Changement de base : Soient B, B' deux bases de E et $P=\mathrm{mat}_B(B')$, $M=\mathrm{mat}_B(\varphi)$, $M'=\mathrm{mat}_{B'}(\varphi)$, alors $M'={}^tPMP$.

[GRi] p 296

Ex 2 : $\varphi : \mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $(x,y)\mapsto x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3-x_4y_4$, $M=\begin{pmatrix}1 & & & (0)\\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ (0) & & & -1\end{pmatrix}$.

Prop 3 : Soit $j : E\to E^*$, $y\mapsto j(y)$ où $j(y) : E\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\varphi(x,y)$. Soit $B=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E et B^* la base duale de B. On a :
$\mathrm{mat}_B\varphi = \mathrm{mat}_{B^*}(j(e_1),\dots,j(e_n))$

Def 4 : • On appelle rang de φ le rang de j.
• On appelle noyau de φ, noté $N(\varphi)$, le noyau de j, ie $N(\varphi)=\{y\in E,\ \forall x\in E, \varphi(x,y)=0\}$
• On dit que φ est non dégénérée si $N(\varphi)=\{0\}$, ie $\varphi(x,y)=0\ \forall x\in E \Rightarrow y=0$.

Prop 5 : $n=\mathrm{rg}\,\varphi+\dim N(\varphi)$.

[GOU2] p 224

Def 6 : φ est dite symétrique si $\forall (x,y)\in E^2$, $\varphi(x,y)=\varphi(y,x)$.

Rem 7 : Si B est une base de E, φ est symétrique ssi $\mathrm{mat}_B(\varphi)$ est symétrique.

Ex 8 : Soit $f : \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable en $a\in\mathbb{R}^n$. Alors, $D^2f(a) : \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $(h,k)\mapsto\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)h_ik_j$ est bilinéaire symétrique. [GOU1] p310

2) Formes quadratiques

Def 9 : Une application $q : E\to\mathbb{R}$ est dite forme quadratique sur E si, en notant $B=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E et $x=\sum_{i=1}^n x_ie_i$, $q(x)$ est un polynôme homogène de degré 2 en les x_i. [GRi] p299

Prop 10 (i) Soit $\varphi : E\times E\to\mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique, alors $q : E\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\varphi(x,x)$ est une forme quadratique sur E.
(ii) Si $q : E\to\mathbb{R}$ est une f.q, $\exists !\ \varphi : E\times E\to\mathbb{R}$ bilinéaire symétrique tq $\forall x\in E$, $q(x)=\varphi(x,x)$.
De plus φ est donnée par : $\forall x,y\in E\times E$,
$$\varphi(x,y)=\frac{1}{2}[q(x+y)-q(x)-q(y)] = \frac{1}{4}[q(x+y)-q(x-y)]$$
φ s'appelle la forme polaire de q.

Ex 11 : • si $\varphi(x,y)=\sum_{i,j} a_{ij}x_iy_j$, alors $q(x)=\sum_i a_{ii}x_i^2+\sum_{i<j}(a_{ij}+a_{ji})x_ix_j$ [GOU2] p225
• Si $q(x)=\sum_i a_{ii}x_i^2+\sum_{i<j}a_{ij}x_ix_j$ alors $\varphi(x,y)=\sum_i a_{ii}x_iy_i+\frac{1}{2}\sum_{i<j}a_{ij}(x_iy_j+x_jy_i)$
• $q_1 : \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$, $M\mapsto \mathrm{tr}(M^2)$ est une f.q de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de forme polaire $\varphi_1 : \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\times\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$, $(M,N)\mapsto\mathrm{tr}(MN)$ [X-ENS3] p216

Def 12 : • Soit q une f.q de E et B une base de E. On appelle rang, noyau, matrice dans la base B de q le rang, noyau, matrice dans la base B de sa forme polaire. [GRi] p302
• q est dite non dégénérée si sa forme polaire est non dégénérée.

Ex 13 : $q : \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $(x,y,z)\mapsto 3x^2+y^2+2xy-3xz$ est une f.q de $\mathbb{R}^3$ de forme polaire [GOU2] p225
$\varphi : \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $(x,y)\mapsto 3x_1y_1+x_2y_2+x_1y_2+x_2y_1-\frac{3}{2}x_1y_3-\frac{3}{2}x_3y_1$

et de matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

• $q_a : (x,y,z) \longmapsto a(x^2+y^2+z^2) - (2xy+2xz+2yz)$ est non dégénérée ssi $a \notin \{2,-1\}$.

3) Formes quadratiques définies positives

[GRi] p302 — Def 14 : Soit q une f.q de E. q est dite :
- positive si $\forall x \in E \; q(x) \geq 0$
- définie si $q(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Rem 15 : Une f.q positive est nécessairement non dégénérée, mais la réciproque est fausse.

Contre-Ex 16 : $q(x) = x_1^2 - x_2^2$ est non dégénérée.

[ENS 3] p201. — Ex 17 : Soit $(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{2n}$. On pose $q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{x_i x_j}{a_i b_j + a_j b_i}$. Alors q est définie positive ssi les $\frac{a_i}{b_i}$ sont 2 à 2 distincts.

[GOU2] p230 — Thm 18 (Inégalité de Schwarz) : Si q est positive alors $\forall (x,y) \in E^2$, $|\varphi(x,y)|^2 \leq q(x)q(y)$.
Si de plus q est définie, il y a égalité ssi (x,y) est une famille liée.

Cor 19 (Inégalité de Minkowsky) : Si q est positive, alors $\forall (x,y) \in E^2$, $\sqrt{q(x+y)} \leq \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}$

2) Orthogonalité et isotropie

1) Orthogonalité

On se fixe q une f.q de forme polaire φ.

[GOU2] p226 — Def 20 : • Deux vecteurs $x, y \in E$ sont dits orthogonaux selon q si $\varphi(x,y) = 0$

• Soit $A \subset E$. On appelle orthogonal de A selon q l'ensemble $A^\perp = \{y \in E, \forall x \in A, \varphi(x,y) = 0\}$

• Deux sous ensembles A, B de E sont orthogonaux selon q si $\forall x \in A, \forall y \in B, \varphi(x,y) = 0$. On note $A \perp B$

Ex 21 : $Q : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $A \mapsto \det A$, $F = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \operatorname{Tr} A = 0\}$ — [GRi] p320

Alors $F^\perp = \{\lambda I_2, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Prop 22 : (i) si $A \subset E$, $A^\perp$ est un sev de E — [GRi] p311
(ii) $N(q) = E^\perp$ — [GOU2] p226
(iii) si $F \subset E$, $F \subset F^{\perp\perp}$
(iv) si $A \subset B \subset E$, $B^\perp \subset A^\perp$
(v) $\forall A \subset E$, $N(q) \subset A^\perp$

Prop 23 : • si F est un sous ev de E :
(i) $\dim F + \dim F^\perp = \dim E + \dim(F \cap N(q))$
(ii) $F^{\perp\perp} = F + N(q)$

• si q est non dégénérée :
(iii) $\dim E = \dim F + \dim F^\perp$
(iv) $F = F^{\perp\perp}$

Def 24 : Une base $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ de E est dite q-orthogonale si $\forall i,j \in [\![1,n]\!]$, $i \neq j$, $\varphi(e_i,e_j) = 0$ — [GRi] p304

Application 25 (Inégalité d'Hadamard) : Si $A = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ où $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, — [MEU] p86
$\det(A) \leq q(e_1) \cdots q(e_n)$
et il y a égalité ssi $\mathcal{B}$ est une q-base.

Thm 26 : On munit $E \neq \{0\}$ d'une forme quadratique q. Alors il existe sur E des bases q-orthogonales. En d'autres termes, il existe toujours une base $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ telle que si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, alors $q(x) = a_1 x_1^2 + \dots + a_r x_r^2$ avec $a_i \in \mathbb{R}$ et $r = \operatorname{rg}(q)$, ou encore, $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} a_1 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & a_r & \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}$ — [GRi] p305

Méthode de Gauss : Pour toute forme quadratique q, il existe $r = \operatorname{rg}(q)$ formes linéaires indépendantes $l_1,\dots,l_r$ tq $q = \sum_{i=1}^{r} a_i l_i^2$, $a_i \in \mathbb{R}$ — [GOU2] p228

Algorithme : On utilise :
- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $ab + aS + bR = (a+R)(b+S) - RS$
- $ab = \frac{1}{4}\left((a+b)^2 - (a-b)^2\right)$

Ex 27 : • $q(x) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_1x_3 + x_2x_3$
$$= \left(x_1 + \frac{x_3}{2}\right)^2 - 2\left(x_2 - \frac{x_3}{4}\right)^2 - \frac{x_3^2}{8}$$
• $q(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_1x_4$
$$= \frac{1}{4}\left[(x_1+x_2+x_3+x_4)^2 - (x_1-x_2+x_3-x_4)^2\right]$$

2) Isotropie

...u2) p226 Def 28 : On appelle cône isotrope de q l'ensemble
$$C_q = \{x \in E : q(x) = 0\}.$$
• $x \in E$ est dit isotrope si $q(x) = 0$, ie $x \in C_q$.

...) p320 Ex 29. $C_Q = \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \setminus GL_2(\mathbb{R})$

...2) p227 Prop 30 : $N(q) \subset C_q$.

...) p303 Ex 31 : • $q_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x_1^2 - x_2^2$ $\quad C_{q_2} = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 = \pm x_2\}$
• $q_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ $\quad C_{q_3} = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2, x_3 = \pm\sqrt{x_1^2+x_2^2}\}$

Def 32 : Un sous ev F de E est dit isotrope si $F \cap F^{\perp} \neq \{0\}$

Prop 33 Soit F un sous ev de E. F est isotrope ssi $E = F \oplus F^{\perp}$.

Ex 34 : Dans l'Ex 21, F est non isotrope.

3) Réduction des formes quadratiques

1) Pseudo-réduction simultanée

...) p241 Thm 35 : Soit q une fq définie positive et q' une fq quelconque. Alors il existe une base orthonormée pour q et orthogonale pour q'.

NS 3] p222 Application 36. Soient $A, B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ tq $\alpha + \beta = 1$. Alors $\det(\alpha A + \beta B) \geq (\det A)^{\alpha}(\det B)^{\beta}$.

Application 37 (Ellipsoïde de John-Lowner) :

DVPT 1 Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ d'intérieur non vide.
Il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K.

...NS3) p229

2) Théorème de Sylvester

[GRi] p309 Thm 38 (Sylvester) : Il existe une base $B = (e_1, \dots, e_n)$ tq si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, on a $q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2$, ie $\mathrm{mat}_B(q) = \begin{pmatrix} I_p & & (0) \\ & -I_{r-p} & \\ (0) & & 0 \end{pmatrix}$ où $r = \mathrm{rg}(q)$.

Def 39 : Le couple $(p, r-p)$ est appelé signature de q.

Ex 40 : (i) $\mathrm{sgn}(q_1) = \left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2}\right)$
(ii) $\mathrm{sgn}(Q) = (2, 2)$

Cor 41 : (i) q est définie positive ssi $\mathrm{sgn}(q) = (n, 0)$
(ii) q est non dégénérée ssi $\mathrm{sgn}(q) = (p, n-p)$.

4) Applications à la géométrie

1) Classification des coniques

[TIS] p113 On procède à la classification des coniques $\mathcal{C} : q(x,y) + 2\ell(x,y) + c = 0$ avec q fq $\neq 0$, ℓ linéaire et c constante. On définit la fq homogénéisée $Q(x,y,z) = q(x,y) + 2z\,\ell(x,y) + cz^2$.

rg(Q)	sgn(q)	conique	rg(Q)	sgn(q)	conique
1	(0,1)	droite double	3	(0,2)	$\emptyset$
2	(1,1)	2 dtes concourantes		(1,1)	hyperbole
	(0,2)	un point		(2,0)	ellipse
2	(0,1)	$\emptyset$		(1,0)	parabole.
	(1,0)	2 dtes parallèles			

2) En géométrie différentielle

[GOU1] p Thm 42 : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^2$ tq $Df(a) = 0$, $a \in U$. On note q la fq associée à la hessienne de f en a.
(i) Si q est définie positive (resp. négative), f admet un min (resp. max) relatif en a.
(ii) Si q n'est ni positive, ni négative, f n'admet pas d'extremum relatif en a.

DVPT 2 Thm 43 (Lemme de Morse) : Soit $f : U \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^3$ sur U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $0 \in U$. Si $Df(0) = 0$, $D^2f(0)$ non dégénérée et $\mathrm{sgn}(D^2f(0)) = (p, n-p)$, $\exists\, \varphi$ un difféo $\mathcal{C}^1$ entre 2 vois. de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tq $\varphi(0) = 0$ et $f(x) - f(0) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2$ [ROU] p354
où $u = \varphi(x)$.

Figure 1:

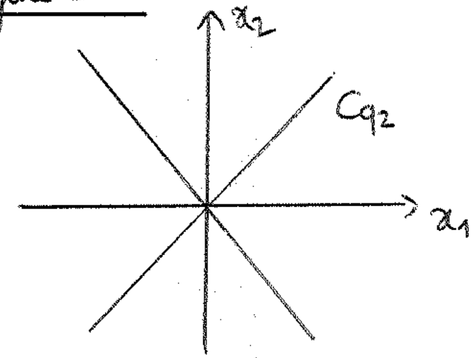
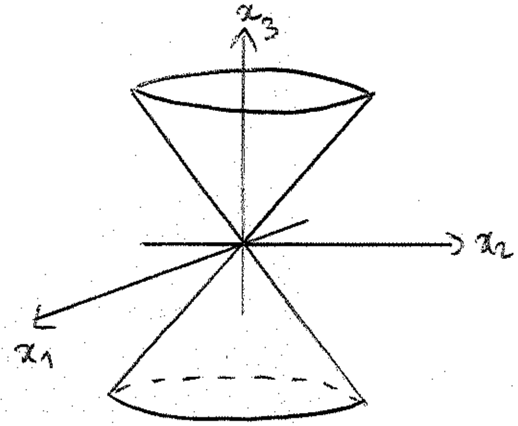


Figure 2:



Groupe orthogonal

[Pe] p123

Déf: • Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur E non dégénérée. On appelle isométries de E les automorphismes $u \in GL(E)$ tq $\forall x, y \in E$, $\varphi(u(x), u(y)) = \varphi(x, y)$.
• Les isométries forment un sous gpe de $GL(E)$ appelé groupe orthogonal et noté $O(E)$.

Prop: $u \in GL(E)$ est une isométrie relativement à φ ssi il conserve la f.q associée à φ, ie $\forall x \in E$, $q(u(x)) = q(x)$.

Prop: Soit $u \in GL(E)$ tq $u^2 = id$. Alors il existe 2 sous ev E^+ et E^- tq (i) $E = E^+ \oplus E^-$
(ii) $u_{|E^+} = id_{E^+}$, $u_{|E^-} = -id_{E^-}$
$u \in O(E)$ ssi $E^+ \perp E^-$.
On a alors $E^+ = (E^-)^\perp$ et $E^- = (E^+)^\perp$ de sorte que E^+ et E^- sont non isotropes. Réciproquement, si $F \subset E$ est un ss ev non isotrope, $\exists !\, u$ symétrie orthogonale tq $F = E^+$.

Sous espaces totalement isotropes (SETI):

[Gou] p23

Déf: Soit q une fq sur E. On appelle SETI un sous ev F de E tq $\forall x \in F$, $q(x) = 0$, ie tq $F \subset F^\perp$.
• On appelle SETI maximal (SETIM) un SETI F tq pour tout SETI G vérifiant $F \subset G$, on a $F = G$.

Prop: (i) Soit F un SETI, alors $\dim F \leq n - \frac{r}{2}$ où $r = rg(q)$.
(ii) Tout SETI est inclus dans un SETIM.

Prop: Soit q une f.q non dégénérée de E:
(i) Tous les SETIM ont même dimension appelée indice de q.
(ii) si $sgn(q) = (s, t)$ et F est un SETIM, $\dim F = \inf(s, t)$.

Références:

[GOU1]. Gourdon, "Analyse"
[GOU2]. Gourdon, "Algèbre"
[GRI]. Grifone, "Algèbre linéaire"
[X-ENS 3]. Francinou, Gianella, Nicolas, "Oraux X-ENS Algèbre 3"
[MEU]. Meunier, "Agrégation interne de mathématiques"
[TIS]. Tisseron, "Géométries affines, projective et euclidienne"
[Per]. Perrin, "Cours d'Algèbre".