# 171 Formes quadratiques réelles. Exemples et applications

Les formes quadratiques apparaissent comme l'équivalent naturel des polynômes de degré 2 sur un E.V. Ils vont aussi nous permettre de généraliser la notion d'isométrie.

__Cadre:__ $E$ est un $\mathbb{R}$-E.V. de dim finie $n$

## I formes quadratiques et algèbre bilinéaire

### 1) Définitions [Per]

__Def 1:__ • Une application $b : E \times E \to \mathbb{R}$ est dite bilinéaire symétrique si : $\forall x, y \in E\ b(x,y) = b(y,x)$ et $\forall y \in E\ x \mapsto b(x,y)$ est linéaire.
• Une application $q : E \to \mathbb{R}$ est dite quadratique si elle est de la forme $q(x) = b(x,x)$ avec $b$ bilinéaire symétrique

__Rq 2:__ • On a une correspondance entre forme bilinéaire symétrique et forme quadratique grâce à la polarisation :
$b(x,y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y)) = \frac{1}{2}(q(x) + q(y) - q(x-y)) = \frac{1}{4}(q(x+y) + q(x-y))$
• $q$ est homogène de degré 2 : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in E\quad q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$

__Exp 3:__ • le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ induit une forme quadratique : $q(x) = \langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2$
• Sur $\mathbb{R}^2$, $q(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_2 = 0 \\ x_1^3/x_2 & \text{si } x_2 \neq 0 \end{cases}$ est homogène de degré 2 mais n'est pas une forme quadratique
• Si $f$ est $C^2$, $D^2 f$ est une forme bilinéaire symétrique

__Def 4:__ Soit $\mathcal{B} = (e_i)_i$ une base de $E$, la matrice de $b$ et $q$ dans cette base est $A = (b(e_i, e_j))_{i,j}$. Dans cette base on a
$b(x,y) = {}^t[x]_{\mathcal{B}} A [y]_{\mathcal{B}}$ et $q(x) = {}^t[x] A [x]$ (1)
De plus $A$ est symétrique.

__Exp 5 (Plan hyperbolique) :__ Si $n = 2$, $(E, q)$ est un plan hyperbolique si dans une base $(e_1, e_2)$, la matrice est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, i.e. $q(e_1) = q(e_2) = 0$ et $b(e_1, e_2) = 1$

__Rq 6:__ Réciproquement si $A$ est une matrice symétrique et que dans une certaine base $q$ est donnée par (1), alors $q$ est une forme quadratique.

__Prop 7 (Changement de base) :__ Soit $A$ la matrice de $q$ dans la base $\mathcal{B}$, et soit $\mathcal{B}'$ une autre base, alors la matrice de $q$ dans la base $\mathcal{B}'$ est ${}^tPAP$ où $P = [id]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ est la matrice de passage.

__Rq 8:__ Cela introduit une action de groupe appelée congruence :
$$\begin{array}{rcl} GL_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ (P, A) & \mapsto & {}^tPAP \end{array}$$

### 2) Application à la réduction

__Def 8:__ • Deux formes quadratiques sont équivalentes si elles ont la même matrice dans certaines bases.
• De même, deux matrices $A$ et $B$ sont équivalentes il existe $P$ inversible tq $B = {}^tPAP$ (dans la même orbite sous l'action de conjugaison)
• Une base $(e_i)_i$ est dite orthogonale si $\forall i \neq j\ b(e_i, e_j) = 0$ i.e. la matrice associée est diagonale
• Une base $(e_i)_i$ est dite orthonormale si $\forall i,j\ b(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ i.e. la matrice associée est l'identité.

__Exp 9:__ les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sont équivalentes, ainsi dans un plan hyperbolique il existe une base $(e_1, e_2)$ tq $b(e_1, e_2) = 0$, $q(e_1) = 1$, $q(e_2) = -1$, appelée base hyperbolique.

__Def 10:__ • Le signe (appartenant à $\{-1, 0, 1\}$) du déterminant d'une forme quadratique ne dépend pas du choix de la base, il est appelé discriminant. • Une forme est non dégénérée si son discriminant est non nul

**Exp 11 :** • le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ est de discriminant positif
• le discriminant d'un plan hyperbolique est négatif
• Sur $\mathbb{R}^2$ $q(x) = x_1^2$ est dégénérée (de discriminant nul)

**Algo 12 (de Gauss) [Gri] :** On cherche à réduire une matrice $A$, on ${}^t x A x = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$ par récurrence :
• Si $\exists i_0$ tq $a_{i_0 i_0} \neq 0$, alors ${}^t x A x = a_{i_0 i_0} \varphi_1(x)^2 +$ termes sans $x_{i_0}$ avec $\varphi_1(x) = x_{i_0} + \frac{1}{a_{i_0 i_0}} \sum_{j \neq i_0} a_{i_0 j} x_j$ et on itère sur les termes restant.
• Sinon si $\exists i_0 \neq j_0$ tq $a_{i_0 j_0} \neq 0$ on a ${}^t x A x = 2 \varphi_1(x) \varphi_2(x) +$ des termes sans $x_{i_0}, x_{j_0}$
Avec $\varphi_1 \varphi_2 = \frac{1}{4}(\varphi_1 + \varphi_2)^2 - \frac{1}{4}(\varphi_1 - \varphi_2)^2$, $\varphi_1(x) = a_{i_0 j_0} x_{i_0} + \sum_{\ell \neq i_0, j_0} a_{i_0 \ell} x_\ell$ et $\varphi_2(x) = x_{j_0} + \sum_{j \neq i_0, j_0} \frac{a_{i_0 j}}{a_{i_0 j_0}} x_{i_0 j}$ et on itère sur les termes restants.
• Sinon ${}^t x A x = 0 = \sum_i 0 \cdot \varphi_i(x)^2$ avec $\varphi_i(x) = x_i$.
Ainsi on obtient $n$ formes linéaires indépendantes $\varphi_i$ tq ${}^t x A x = \sum_i c_i \varphi_i(x)^2$, donc $A = {}^t P \operatorname{diag}(c_i) P$ avec $P = (\varphi_j(e_i))_{i,j}$

**Exp 13 :** $x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = (x_1 + x_3)(x_2 + x_3) - x_3^2$
$= \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - \frac{1}{4}(x_1 - x_2)^2 - x_3^2$

## 3) Théorème de Sylvester et réduction simultanée [Per]

**Thm 14 (Inertie de Sylvester) :** Soit $Q$ une forme quadratique, il existe un unique couple $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ appelé signature de $Q$, tq dans une certaine base $Q$ a pour matrice : $\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
• Ainsi la signature classifie à équivalence près les formes quadratiques.

**Def 15 :** • $Q$ est positive si $\forall x \in E$ $Q(x) \geq 0$ $(\Leftrightarrow q = 0)$
• $Q$ est définie positive si $\forall x \in E \setminus \{0\}$ $Q(x) > 0$ $(\Leftrightarrow p = n)$

**Lemme 16 (Morse) [Rou] :** Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^3$ avec $U$ ouvert contenant $0$, si $Df(0) = 0$ et $D^2 f(0)$ est non dégénérée de type $(p, n-p)$, alors il existe un $\mathcal{C}^1$-difféo $\phi$ entre deux voisinage de l'origine tq $\phi(0) = 0$ et $f(x) - f(0) = \phi_1^2(x) + \dots + \phi_p^2(x) - \phi_{p+1}^2(x) - \dots - \phi_n^2(x)$

**Thm 17 (DVP 1) [Dié] :** Soit $P$ un polynôme réel de degré $n$, soit $\mathcal{B}(P)$ le polynôme de $\mathbb{R}[X,Y]$ défini par $\mathcal{B}(P) = \frac{P(X)P'(Y) - P(Y)P'(X)}{X - Y} = \sum_{i,j} A_{i,j} X^i Y^j$, $\mathcal{B}(P)$ est symétrique i.e. $(A_{i,j})_{i,j}$ est symétrique donc définie une forme quadratique $Q(P)$, de signature $(p,q)$, alors : • $p - q =$ nb de racines réelles distinctes
• $p + q =$ nb de racines distinctes. — Dev 1

**Exp 17.5 :** Si $P = X^3 - 1$ alors $\mathcal{B}(P) = 3X^2Y^2 + 3X + 3Y$ et $Q(P)$ est de signature $(2,1)$

**Prop 18 (Réduction simultanée) :** Soit $q_1$ une forme déf positive et $q_2$ une forme quadratique quelconque, alors il existe une base orthonormale pour $q_1$ et orthogonale pour $q_2$

**Rq 19 :** Cette méthode requiert un calcul de valeurs propres.

# II Isotropie, orthogonalité et groupe orthogonale

## 1) Isotropie et orthogonalité [Per]

**Def 20 :** • Un vecteur $x \in E$ est isotrope si $q(x) = 0$
• Un sous-espace-vectoriel $F \subset E$ est isotrope si $q_{/F}$ est dégénérée, i.e. $\exists x \in F$ $\forall y \in F$ $b(x,y) = 0$
• un sev $F \subset E$ est totalement isotrope si $q_{/F} = 0$ i.e. $\forall x, y \in F$ $q(x,y) = 0$
• L'ensemble des vecteurs isotropes forme un cône appelé cône isotrope.

**Exp 21 :** • Si $E$ est un plan hyperbolique de base hyperbolique $(e_1, e_2)$, alors le cône isotrope est $\operatorname{vect}(e_1) \cup \operatorname{vect}(e_2)$ (Fig 1)
• En relativité, la forme quadratique $t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ a une grande importance le cône isotrope représente dans les déplacements de la lumière (Fig 2)

**Def 22 :** • Deux parties $A, B \subset E$ sont orthogonales si $\forall x \in A, y \in B$ $b(x,y) = 0$
• Soit une partie $A \subset E$, l'orthogonale de $A$ est le sev $A^\perp := \{y \in E \mid b(x,y) = 0 \ \forall x\}$
• Si $E = F_1 \oplus F_2$ et si $F_1$ est orthogonale à $F_2$, alors on note $E = F_1 \oplus^\perp F_2$.

**Rq 23 :** Un sev $F \subset E$ est : • isotrope ssi $F \cap F^\perp \neq \{0\}$
• totalement isotrope ssi $F \subset F^\perp$

**Prop 24 :** Soit un sev $F \subset E$ et $q$ non dégénérée, alors : • $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$
• $F^{\perp\perp} = F$
• $E = F_1 \perp F_2$ ssi $F_1$ est non isotrope et $F_2 = F_1^\perp$ ssi $F_2$ non isotrope et $F_1 = F_2^\perp$

**Exp 25 :** Soit $E$ un plan hyperbolique de base hyperbolique $(e_1, e_2)$, alors $\operatorname{vect}(e_1)^\perp = \operatorname{vect}(e_1)$

## 2) Définition du groupe orthogonal [Per]

**Def 26 :** Le groupe orthogonal associé à une forme quadratique $q$ est

$O(q)=\{u\in GL(E) \mid q=q\circ u\}$

• Étant fixée une base, soit $A$ la matrice associée à $q$, le groupe matriciel associé à $O(q)$ est $O(A)=\{P\in GL_n(\mathbb{R}) \mid {}^tPAP=A\}$

• On note en particulier $O(p,q,n)= O\left(\begin{array}{c|c|c} I_p & 0 & 0\\ \hline 0 & -I_q & 0 \\ \hline 0&0&0\end{array}\right)$,

$O(p,q)=O(p,q,p+q)$ et $O(n)=O(n,0,n)$

• On note $SO(\dots)$ le sous groupe de $O(\dots)$ formé des éléments de det 1.

**Rq 27 :** Le théorème de Sylvester montre que $O(Q)\simeq O(p,q,n)$ où $(p,q)$ est la signature de $Q$.

• Si $\tilde{q}=\lambda q$, alors $O(\tilde{q})=O(q)$

**Exp 28 :** Soit $q$ non dégénérée, soit $s$ une symétrie ($s^2=id$) et $E=E^+\oplus E^-$ la décomposition tq $s_{|E^+}=id$ et $s_{|E^-}=-id$, alors $s$ est une symétrie orthogonale ssi $E^+$ et $E^-$ ne sont pas ~~orthogonaux~~ isotropes et $E^-=E^{+\perp}$

## 3) Étude des groupes orthogonaux.

**Thm 29 (Cartan-Dieudonné) [Per] :** Si $q$ est non dégénérée, toute isométrie est produit d'au plus $n$ réflexions orthogonales

**Rq 30 :** le nombre d'isométrie dans une telle décomposition est paire si l'isométrie est positive et impaire sinon.

**Exp 31 :** Toute isométrie négative sur un espace quadratique non dégénérée de dim 2 est une réflexion orthogonale.

**Thm 32 (Décomposition Polaire) [Cal] :** Soit $S_n^{++}$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives, on a un homéomorphisme

$$O(n)\times S_n^{++} \xrightarrow{\sim} GL_n(\mathbb{R})$$
$$(O,S)\mapsto SO$$

De plus $O(n)$ est compact.

OUBLI, cf fin

# III Applications en dimension 2 et 3

## 1) Étude de SO(2) [Per]

Soit $\mathbb{U}=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|=1\}$, On munit $\mathbb{C}$ de la norme au carré : $|z|=Re^2 z+Im^2 z$. Alors $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace quadratique de dim 2, on considère l'action par multiplication de $\mathbb{U}$ sur $\mathbb{C}$.

**Prop 34 :** Cette action induit un isomorphisme $SO(\mathbb{C},|\cdot|^2)\simeq \mathbb{U}$

• On en déduit un isomorphisme $\mathbb{U}\to SO(2)$

$e^{i\theta}\mapsto \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$

Cette matrice est une rotation d'angle $\theta$ (Fig 3)

**Exp 35 :** Si $q$ est déf positive toute isométrie s'écrit dans une certaine base orthonormale, dans forme diagonale par bloc avec des blocs de la forme : • $(1)$ • $(-1)$ • $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$

## 2) Étude de SO(3) [Per]

Soit $\mathbb{H}=\mathbb{R}\langle i,j,k \mid i^2=j^2=k^2=ijk=-1\rangle$ l'ensemble des quaternions, soit $N(x_1+x_2 i+x_3 j+x_4 k)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$ la norme des quaternions alors $\mathbb{H}^*$ agit par isométrie sur $\mathbb{H}$ par conjugaison.

**Prop 36 :** Cette action stabilise $P=Vect_{\mathbb{R}}(i,j,k)$ et induit un isomorphisme

$\mathbb{H}^*/\mathbb{R}^* \longrightarrow SO(P,N)\simeq SO(3)$, $q_1[\mathbb{R}^*]\mapsto (q_2\mapsto q_1q_2q_1^{-1})$

**Exp 37 :** Si $q\neq 0$ est un quaternion pure $(P)$, alors l'isométrie associée à $q$ est la symétrie par rapport à $vect_{\mathbb{R}}(q)$ (Fig 4). En utilisant le Thm de Cartan-Dieudonné on peut ainsi reconstituer toute isométrie positive

## 3) Coniques [Aud]

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien (de direction un espace quadratique déf positif) de dim 2, soit $O\in\mathcal{E}$.

**Def 38 :** Une conique est une fonction $f$ modulo multiplication par $\mathbb{R}^*$ de la forme $f(M)=q(\vec{OM})+L_0(\vec{OM})+c_0$ avec $q$ une forme quadratique non nulle, $L_0$ une forme linéaire et $c_0$ une constante.

Rq 39 : • La déf ne dépend pas de O.
• q ne dépend pas de O, mais $L_0$ et $c_0$ en dépendent

Déf 40 : La conique est dite propre si la forme quadratique Q déf sur $E\times\mathbb{R}$ par $Q(v,z) = q(v) + L_0(v)z + c_0 z^2$ est non dégénérée.

Prop 41 : Une conique propre d'image non vide peut s'écrire sous exactement l'une des formes ci-dessous dans une base orthogonale affine choisie :

• $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1$ $a,b>0$ (Ellipse) • $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1$ $a,b>0$ (hyperbole)

• $y^2-2px$ $p>0$ (Parabole) cf: Fig 5

Fin de la partie II.3)

Prop 42 (comp connexes) : $O(n)$ a deux comp connexes $SO(n)$ et $O^-(n)$
Ainsi $GL_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes $GL_n^+(\mathbb{R})$ et $GL_n^-(\mathbb{R})$

App 43 : $SL_n(\mathbb{R})$ est connexe.

Thm 44 : $O(p,q)$ est homéomorphe à $O(p)\times O(q)\times\mathbb{R}^{pq}$

App 45 : Si $p\geq 1$ et $q\geq 1$, $O(p,q)$ a 4 comp connexes, on note $SO_0(p,q)$ la composante connexe de $I_{p,q}$

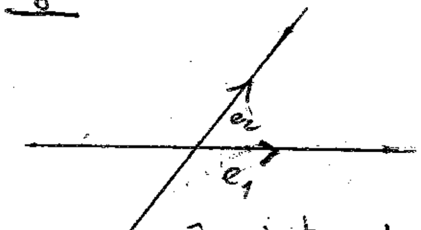
DVP2 { App 46 (DEV2) [Cal] : On a l'isomorphisme $SO_0(1,2)\simeq PSL_2(\mathbb{R})$

DVP1 : Thm 17 (Henkel) [Die]

DVP2 :

Réf : • [Cal] : Caldero, Germoni, Histoires Hédonistes de groupes et de géométries
• [DIE] : Dieudonné, Calcul infinitésimal
• [Aud] : Audin Géométrie
• [Per] : Perrin Cours d'algèbre
• [Gri] : Grifone Algèbre linéaire
• [Mne] : Mneimné, Testard Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques

Fig 1 :




Cône isotrope d'un plan hyperbolique de base hyperbolique $(e_1,e_2)$.

Fig 2 :

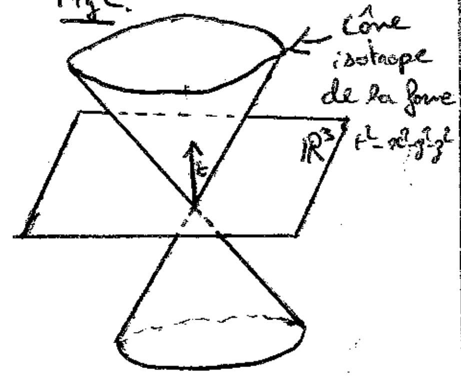



Fig 3

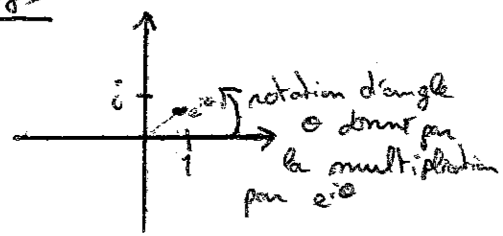



Fig 4 : La symétrie d'axe vect(q) est donnée par q[R]

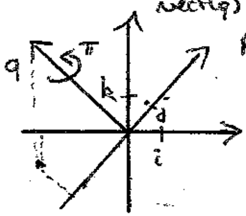
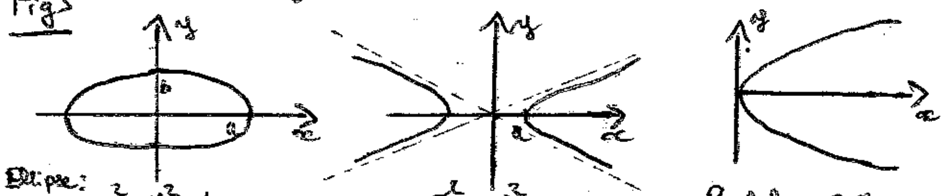



Fig 5




Ellipse : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ Hyperbole : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ Parabole : $y^2=2px$