171

Formes quadratiques réelles. Exemples et applications

I. Forme quadratique et algèbre bilinéaire

1) Définitions et premières propriétés ([GOU1] p 227-231)

Def 1 : Soient E et F deux $\mathbb{R}$-ev et une application $\varphi : E\times F \to \mathbb{R}$, $(x,y)\mapsto \varphi(x,y)$.
On dit que φ est bilinéaire si :
- $\forall x\in E$, $y\mapsto \varphi(x,y)$ est linéaire
- $\forall y\in E$, $x\mapsto \varphi(x,y)$ est linéaire

De plus, φ est symétrique si $\forall (x,y)\in E^2$, $\varphi(x,y)=\varphi(y,x)$

Def 2 : On appelle forme quadratique sur E toute application q de la forme $q : E\to\mathbb{R}$, $x\mapsto \varphi(x,x)$ où φ est une forme bilinéaire symétrique

Ex 3 : Dans $\mathbb{R}^3$, $q(x,y,z)=3x^2+y^2+2xy-3xz$ est une forme quadratique
En dimension infinie, $q : \mathbb{R}[X]\to\mathbb{R}$ définie par $q(P)=\int_0^1 P(x)P''(x)dx$ est une forme quadratique sur $\mathbb{R}[X]$. ([GRIF] p 319)

Prop 4 : Soit q une forme quadratique sur E. Il existe une unique forme bilinéaire symétrique φ telle que $\forall x\in E$, $q(x)=\varphi(x,x)$. La forme bilinéaire φ s'appelle la forme polaire de q.

Prop 5 : Identités de polarisation : Soit φ la forme polaire associée à la forme quadratique q alors on a :
- $\varphi(x,y)=\frac{1}{2}\left[q(x+y)-q(x)-q(y)\right]$
- $\varphi(x,y)=\frac{1}{4}\left[q(x+y)-q(x-y)\right]$

Ex 6 : • Le produit scalaire dans un espace euclidien avec pour forme quadratique associée : $\|\ \|^2$
- Si $q : \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$, $A\mapsto tr({}^tAA)$ alors $\varphi(A,B)=tr({}^tAB)$

Ecriture en dimension finie : Soit $B=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. Alors pour tout $x=\sum_{i=1}^n x_ie_i$ et $y=\sum_{i=1}^n y_ie_i$, on a $\varphi(x,y)=\sum_{i,j=1}^n x_iy_j\varphi(e_i,e_j)={}^tXMY$ avec $M=(\varphi(e_i,e_j))\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$

Def 7 : Soit q une forme quadratique sur E de dimension finie et B une base de E. On appelle matrice de q dans la base B la matrice de la forme polaire φ de q dans la base B : $M=(\varphi(e_i,e_j))_{i,j}$ avec $B=(e_i)_i$. Le rang de q est le rang de cette matrice.

Rmq : Le rang de q est aussi le rang de sa forme polaire

Ex 8 : On reprend l'exemple 3, la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $\begin{pmatrix}3&1&-3/2\\1&1&0\\-3/2&0&0\end{pmatrix}$ de rang 3 donc q est de rang 3

Changement de base : Soit E de dim finie n. Soient B et B' deux bases de E, P la matrice de passage de B à B' ($P=Mat_B(B')$), $M=mat_B(\varphi)$, $M'=mat_{B'}(\varphi)$ alors $M'={}^tPMP$

Déf 9 : On appelle noyau de q le s.e.v de E noté $Ker(q)$ défini par $Ker(q)=\{x\in E \mid \forall y\in E, \varphi(x,y)=0\}$ avec φ la forme polaire de q.
La forme q est dite non-dégénérée si $Ker(q)=\{0\}$, dégénérée si $Ker(q)\neq\{0\}$.

Rmq : $\det(M)\neq 0 \iff$ q est non dégénérée
où M est la matrice associée à la forme quadratique q.

2) Formes quadratiques positives, définies positives ([GOU1] p230-235)

Def 10 : Soit q une forme quadratique. On dit que q est définie si $q(x)=0 \iff x=0$

Def 11 : q est positive si $\forall x\in E$, $q(x)\geq 0$

Rmq : q est définie positive si $\forall x\neq 0$, $q(x)>0$

Ex 12 : $q_1(A)=(tr(A))^2$ est positive mais non définie car $q_1\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right)=0$

Prop 13 : Si q est définie alors q est non dégénérée

Rmq : La réciproque est fausse $q(x,y)=x^2-y^2$ est non dégénérée mais q n'est pas définie car $q(x,x)=0$, $\forall x\in E$.

Thm 14 : Inégalité de Schwarz :
Si q est positive alors $\forall (x,y)\in E^2$, $|\varphi(x,y)|^2\leq q(x)q(y)$
Si de plus, q est définie, il y a égalité ssi x et y sont liés

Cor 15 : Inégalité de Minkowsky :
Si q est positive alors $\forall (x,y)\in E^2$, $\sqrt{q(x+y)}\leq\sqrt{q(x)}+\sqrt{q(y)}$

II. Orthogonalité et isotropie

1) Orthogonalité ([GOU1] p230-233)

Def 16 : • Deux vecteurs x et y de E sont dit orthogonaux selon q si $\varphi(x,y)=0$
- Soit $A\subset E$. On appelle orthogonal de A selon q l'ensemble $A^\perp=\{y\in E \mid \forall x\in A, \varphi(x,y)=0\}$
- Deux sous-ensembles A et B de E sont orthogonaux selon q si $\forall x\in A$, $\forall y\in B$, $\varphi(x,y)=0$. On note $A\perp B$.

Prop 17
- si $A \subset E$, $A^\perp$ est un sev de E
- $\mathrm{Ker}(q) = E^\perp$
- Si $F \subset E$, $F \subset F^{\perp\perp}$
- Si $A \subset B \subset E$, $B^\perp \subset A^\perp$

Def 18 : Une base $\mathcal{B}$ est dite q-orthogonale si $\forall e_i \neq e_j \in \mathcal{B}$, $\varphi(e_i, e_j) = 0$.
Elle est dite orthonormée si $\varphi(e_i, e_j) = \delta_{ij}$

Thm 19 : Si E est de dimension finie, il existe une base q-orthogonale de E. On a alors si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est q-orthogonale alors $\forall (x_i) \in \mathbb{R}^n$ $q\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 q(e_i)$. La matrice de q dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale.

Rmq : Il ne faut pas confondre la recherche d'une base orthogonale où on veut que ${}^tPAP$ soit diagonale avec la diagonalisation des endomorphismes où on veut que $P^{-1}AP$ soit diagonale avec $P \in Gl_n(\mathbb{R})$. ([GRIF] p305)

Prop 20 : Si E est de dim finie : Tout sev F de E vérifie
$\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E) + \dim(F \cap \mathrm{Ker}(q))$

Rmq : Si q est non-dégénérée, on a $\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E)$

2) Groupe orthogonal associé à une forme quadratique ([GRIF] p315-317)

But : Etudier les endomorphismes f de E qui conservent une forme quadratique q, c'est à dire tels que $q(f(x)) = q(x)$, $\forall x \in E$.

Def/Prop 21 : E de dim finie, q une forme quadratique non dégénérée sur E, $f \in \mathrm{End}(E)$. Il existe alors un et un seul endomorphisme f^* de E tel que $\varphi(f(x), y) = \varphi(x, f^*(y))$, $\forall x, y \in E$ où φ est la forme polaire de q.
f^* est dit adjoint de f relativement à φ.

Rmq Ecriture matricielle : Si $M = (\varphi(e_i, e_j))_{ij}$ et $A = \mathrm{Mat}_{(e_i)}(f)$
alors $A^* = M^{-1}\,{}^tA\,M$

Ex 22 : Si $E = \mathbb{R}^2$ muni de $q(x) = x_1^2 - x_2^2$ et $A = M(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors
$A^* = M^{-1}\,{}^tA\,M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -c \\ -b & -d \end{pmatrix}$

Prop 23 : E ev de dim finie, q non-dégénérée. On a équivalence entre :
1) $q(f(x)) = q(x)$, $\forall x \in E$
2) $\varphi(f(x), f(y)) = \varphi(x, y)$, $\forall x, y \in E$
3) $f^* \circ f = id$ (en particulier f est bijectif)

Un tel endomorphisme est dit orthogonal relativement à q.

Prop 24 : Soit $O(q) = \{f \in \mathrm{End}(E) \mid f^* \circ f = id\}$. On a :
1) $id \in O(q)$
2) si $f, g \in O(q)$ alors $f \circ g \in O(q)$
3) si $f \in O(q)$ alors $f^{-1} \in O(q)$

En particulier, $O(q)$ est un groupe pour $\circ$ dit groupe orthogonal de q.

Prop 25 $B = (e_i)$: base de E. $M = \mathrm{Mat}_{(e_i)}(q)$ et $A = \mathrm{Mat}_{(e_i)}(f)$ alors
$f \in O(q) \iff {}^tAMA = M$

Ex 26 : Soit $q(x) = 2x_1x_2$ dans $\mathbb{R}^2$ alors $O(q) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1/b & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}^* \right\}$

3) Isotropie ([GRIF] p302, 303, 312, 321)

Def 27 : Soit q une forme quadratique sur E. On appelle cône isotropique l'ensemble $I(q) = \{x \in E \mid q(x) = 0\}$

Ex 28 : $E = \mathbb{R}^2$, $q_1(x) = x_1^2 - x_2^2$, on a $I(q_1) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = \pm x_2\}$
$E = \mathbb{R}^3$, $q_2(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$, $I(q_2) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = \pm\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\}$
(voir annexe)

Prop 29 : On a $\mathrm{Ker}(q) \subset I(q)$

Def 30 : Un sous-ev F de E est dit isotrope si $F \cap F^\perp \neq \{0\}$

Rmq : Il existe des sous-espaces isotropes ssi $I(q) \neq \{0\}$

Def 31 : Un sev F de E est dit totalement isotrope si $\varphi_{|F} = 0$ avec φ la forme polaire de q.

Rmq : F est totalement isotrope $\iff F \subset I(q) \iff F \subset F^\perp$

Ex 32 : $q(x) = x_1^2 - x_2^2$ et $F = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = x_2\}$ totalement isotrope et non inclus dans le noyau

III. Réduction des formes quadratiques

1) Réduction simultanée ([AUD] p271, [FGN] p222, 229)

Thm 33 : Si q est une forme quadratique définie positive et q' une forme quadratique quelconque alors il existe une base orthonormée pour q qui est orthogonale pour q'.

Appli 34 : Convexité logarithmique du déterminant dans S_n^{++}
$\det(\alpha A + \beta B) \geq (\det A)^\alpha (\det B)^\beta$ avec $\alpha + \beta = 1$ et $A, B \in S_n^{++}$

Appli 35 : Ellipsoïde de John-Loewner $\boxed{\text{DEV 1}}$
Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$ alors il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K.

2) Théorème de Sylvester ([GRIF] p306-310)

Méthode de Gauss : Pour toute forme quadratique q, il existe $r=\mathrm{rg}(q)$ formes linéaires indépendantes $\ell_1,\dots,\ell_r$ telles que
$$q=\sum_{i=1}^{r} a_i \ell_i^2,\quad a_i\in\mathbb{R}.$$
On utilise $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$, $xy=\frac14\left((x+y)^2-(x-y)^2\right)$

Ex 36 : Dans $\mathbb{R}^3$, $q(x,y,z)=x^2-2y^2+xz+yz=\left(x+\frac z2\right)^2-2\left(y-\frac z4\right)^2-\frac{z^2}{8}$

Thm 37 : Théorème de Sylvester. Soit E un ev de dim n sur $\mathbb{R}$ et q une forme quadratique sur E. Il existe alors une base (e_i) de E telle que si $x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ alors $q(x)=x_1^2+\dots+x_p^2-x_{p+1}^2-\dots-x_r^2$ où $r=\mathrm{rg}(q)$

ie $\mathrm{mat}_{(e_i)}(q)=\begin{pmatrix} I_p & & (0)\\ & -I_{r-p} & \\ (0) & & (0)\end{pmatrix}$

Def 38 : Le couple $(p,r-p)$ est appelé signature de q noté $\mathrm{sign}(q)$.

Ex 39 : $q(x)=x_1^2+2x_2^2+15x_3^2-4x_1x_2+6x_1x_3-8x_2x_3$
$q(x)=(x_1-2x_2+3x_3)^2+(\sqrt{8}x_3)^2-(\sqrt{2}(x_2-x_3))^2$ donc $\mathrm{sign}(q)=(2,1)$

Ex 40 : Soit q une forme quadratique sur un ev E de dim n sur $\mathbb{R}$. Alors q est
- définie positive $\Leftrightarrow \mathrm{sign}(q)=(n,0)$
- définie négative $\Leftrightarrow \mathrm{sign}(q)=(0,n)$
- non dégénérée $\Leftrightarrow \mathrm{sign}(q)=(p,n-p)$

IV. Applications à la géométrie

1) Classification euclidienne des coniques ([GRIF] p413-414)

Def 41 : Soient q une forme quadratique non nulle et ℓ une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$. On appelle conique l'ensemble $\mathcal{C}$ des $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ vérifiant l'équation
(*) $q(x,y)+\ell(x,y)=k$ où $k\in\mathbb{R}$

On peut classer les coniques selon la signature de q. En changeant éventuellement le signe des deux membres, on peut supposer $\mathrm{sign}(q)$ est $(2,0)$, $(1,1)$ ou $(1,0)$.

On peut réécrire (*) comme $aX^2+bY^2-2rX-2sY=k$

Thm 42 : Soit $\mathcal{C}$ une conique $\neq\emptyset$ et qui ne se réduit pas à un point. Alors
1) Si $\mathrm{sign}(q)=(2,0)$ alors $\mathcal{C}$ est une ellipse car avec $x=X-\frac ra$ et $y=Y-\frac sb$, on a $ax^2+by^2=h$, avec $a>0$ et $b>0$ car $\mathrm{sign}(q)=(2,0)$
2) Si $\mathrm{sign}(q)=(1,1)$ alors $\mathcal{C}$ est une hyperbole éventuellement dégénérée en 2 droites sécantes. $ab<0$ par ex $a>0$, $b<0$, on a $\frac{x^2}{A^2}-\frac{y^2}{B^2}=1$ avec $A=\sqrt{h/a}$ et $B=\sqrt{-h/b}$
3) Si $\mathrm{sign}(q)=(1,0)$ alors $\mathcal{C}$ est une parabole qui peut dégénérer en une droite ou en deux droites parallèles car :
dans ce cas $ab=0$ par ex $a\neq0$ et $b=0$, $a\left(X-\frac ra\right)^2-2sY=h$
donc $y=ax^2$ avec $x=X-\frac ra$ et $y=h+2sY$ si $s\neq0$
sinon $a\left(X-\frac ra\right)^2=0$: une ou deux droites parallèles.

2) Classification euclidienne des quadriques ([GRIF] p415-420)

Def 42 : q une forme quadratique $\neq0$ et ℓ forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$. On appelle quadrique l'ensemble Q des $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ vérifiant $q(x,y,z)+\ell(x,y,z)=k\in\mathbb{R}$

Th 43 Soit Q une quadrique $\neq\emptyset$ et non réduite à un point.
1) $\mathrm{rg}(q)=3$
   a) si $\mathrm{sign}(q)=(3,0)$, Q est un ellipsoïde
   b) si $\mathrm{sign}(q)=(2,1)$, Q est un hyperboloïde à une nappe ou un cône ou un hyperboloïde à deux nappes
2) $\mathrm{rg}(q)=2$
   a) si $\mathrm{sign}(q)=(2,0)$, Q est un paraboloïde elliptique ou un cylindre elliptique
   b) si $\mathrm{sign}(q)=(1,1)$, Q est un paraboloïde hyperbolique ou un cylindre hyperbolique
3) $\mathrm{rg}(q)=1$ $\mathrm{sign}(q)=(1,0)$, Q est un cylindre parabolique ou deux plans parallèles.

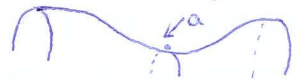
3) Géométrie différentielle ([GOU2] p316, [ROUV] p354)

Def 44 : Un point a pour lequel $Df(a)=0$ est appelé un point critique de f.

Prop 45 : La hessienne de $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ en un point a est $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)\right)_{i,j}$
C'est la matrice d'une forme quadratique $Q(h)=\sum_i h_i^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)+2\sum_{i<j}h_ih_j\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)$

Prop 46 : Soit $f:U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $\mathcal{C}^2$ et $a\in U$ un point critique de f. On note q la forme quadratique associée à la hessienne de f en a :
1) Si q est définie positive/négative alors f admet un minimum/maximum relatif en a

2) Si q n'est ni positive, ni négative, f n'admet pas d'extremum relatif en a

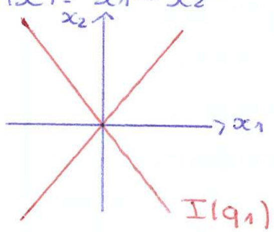


Thm 47 : Lemme de Morse : Soit $f:U\to\mathbb{R}$ $\mathcal{C}^3$ sur U ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0. Si $Df(0)=0$ et $D^2f(0)$ non-dégénérée avec $\mathrm{sign}(D^2f(0))=(p,n-p)$ alors il existe φ un difféomorphisme $\mathcal{C}^1$ entre 2 voisinages de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tq $\varphi(0)=0$ et $f(x)-f(0)=u_1^2+\dots+u_p^2-u_{p+1}^2-\dots-u_n^2$ où $u=\varphi(x)$. DEV2

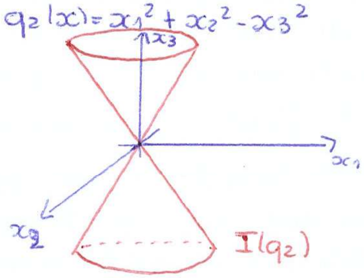
Annexe

* Cônes isotropiques de :

$q_1(x) = x_1^2 - x_2^2$



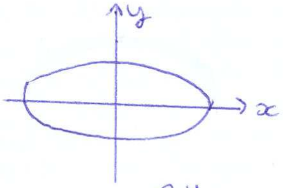
$q_2(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$



* Coniques

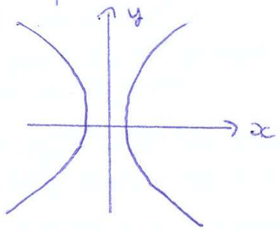
- sign$(q) = (2,0)$

  ellipse $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$

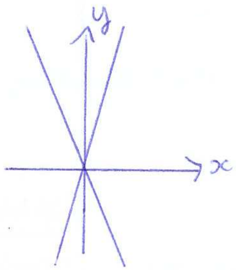


- sign$(q) = (1,1)$

  hyperbole $\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1$

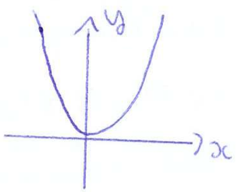


ou

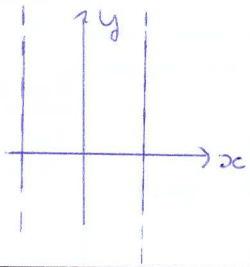


- sign$(q) = (1,0)$

  parabole $y = ax^2$

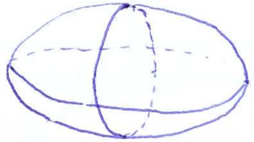


ou



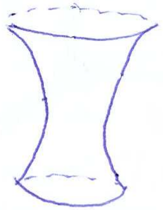
* Quadriques

rg$(q) = 3$ ↳ sign$(q) = (3,0)$
ellipsoïde

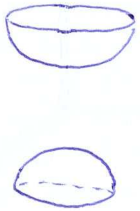


↳ sign$(q) = (2,1)$

cône



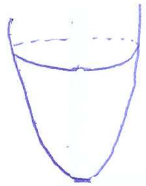
hyperboloïde à une nappe



hyperboloïde à 2 nappes

rg$(q) = 2$ ↳ sign$(q) = (2,0)$

cylindre elliptique



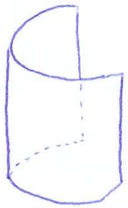
paraboloïde elliptique

↳ sign$(q) = (1,1)$

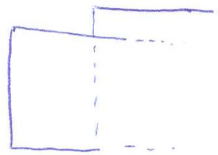
cylindre hyperbolique

paraboloïde hyperbolique

rg$(q) = 1$ sign$(q) = (1,0)$



cylindre parabolique



deux plans parallèles

REFERENCES

[GOU 1] : Gourdon "Algèbre" 2e édition
[GOU 2] : Gourdon "Analyse" 2e édition
[GRIF] : Grifone "Algèbre linéaire" 4e édition
[AUD] : Audin "Géométrie"

Pour les développements :

[FGN] : "Oraux X-ENS Algèbre 3" Francinou, Gianella, Nicolas
[ROUV] : Rouvière "Petit guide du calcul différentiel, ..."

Ellipsoïde de John-Loewner

Maylis Varvenne & Caroline Robet

Notations :
- $Q = \{$formes quadratiques de $\mathbb{R}^n\}$
- $Q^+ = \{$formes quadratiques positives de $\mathbb{R}^n\}$
- $Q^{++} = \{$formes quadratiques définies positives de $\mathbb{R}^n\}$

Théorème. *Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$.*
Alors il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K.
Autrement dit, il existe une unique forme quadratique q définie positive telle que $\mathcal{E}_q = \{x \in \mathbb{R}^n, q(x) \leqslant 1\}$ soit de volume minimal et contienne K.

Démonstration. Soit $q \in Q^{++}$.
On sait qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, .., e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle q est de la forme :

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 \text{ avec } a_i > 0 \ \forall i$$

Soit alors, V_q le volume de $\mathcal{E}_q$, on a donc

$$V_q = \int \cdots \int_{\sum_{i=1}^n a_i x_i^2 \leqslant 1} dx_1..dx_n$$

En posant $t_i = \sqrt{a_i} x_i$, on obtient :

$$V_q = \int \cdots \int_{\sum_{i=1}^n t_i^2 \leqslant 1} \frac{dt_1..dt_n}{\sqrt{a_1..a_n}}$$

Soit S la matrice de q dans une base orthonormale, comme S est symétrique réelle définie positive (ie dans $\mathcal{S}_n^{++}$), il existe P dans $GL_n(\mathbb{R})$ telle que $S = Pdiag(a_1, .., a_n)P^{-1}$.
D'où, $\det S = a_1 ... a_n$ ne dépend pas de la base choisie, on pose donc

$$D(q) = \prod_{i=1}^{n} a_i$$

D'où

$$V_q = \frac{V_0}{\sqrt{D(q)}}$$

où V_0 représente le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$.
Le problème admet une nouvelle formulation : Montrons qu'il existe une unique $q \in Q^{++}$ telle que $D(q)$ soit maximal et que $q(x) \leqslant 1$ pour tout x dans K.

Soit $\mathcal{A} = \{q \in Q^+ | q(x) \leqslant 1, \forall x \in K\}$ et $N(q) = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |q(x)|$ une norme sur Q.
Montrons que $\mathcal{A}$ est un compact convexe non vide de Q.

- $\underline{\mathcal{A}\text{ convexe}}$:
  Soient $q, q' \in \mathcal{A}$ et $\lambda \in [0,1]$. Alors,
  $$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \lambda q(x) + (1-\lambda)q'(x) \geqslant 0$$
  $$\forall x \in K,\ \lambda q(x) + (1-\lambda)q'(x) \leqslant \lambda + 1 - \lambda = 1$$
  D'où $\lambda q + (1-\lambda)q'$ appartient à $\mathcal{A}$ et donc $\mathcal{A}$ est convexe.
- $\underline{\mathcal{A}\text{ fermé}}$:
  Soit $(q_k)_{k\geqslant 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $q \in Q$.
  On a :
  $$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ |q(x) - q_k(x)| \leqslant \|x\|^2 N(q - q_k)$$
  On en déduit donc que $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \lim_{k\to\infty} q_k(x) = q(x)$.
  Donc $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ q(x) \geqslant 0$ et $\forall x \in K,\ q(x) \leqslant 1$ et donc q appartient à $\mathcal{A}$.
  D'où $\mathcal{A}$ est fermé.
- $\underline{\mathcal{A}\text{ borné}}$:
  Le compact K est d'intérieur non vide, donc il existe a dans K et $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset K$. Soit $q \in \mathcal{A}$.
  Si $\|x\| \leqslant r$, alors $a + x \in K$ donc $q(a+x) \leqslant 1$.
  De plus, $q(-a) = q(a) \leqslant 1$, donc d'après l'inégalité de Minkowski, on a :
  $$\begin{aligned} \sqrt{q(x)} = \sqrt{q(a+x-a)} &\leqslant \sqrt{q(x+a)} + \sqrt{q(-a)} \\ &\leqslant 2 \end{aligned}$$
  Donc $q(x) \leqslant 4$.
  Si $\|x\| \leqslant 1$,
  $$|q(x)| = q(x) = \frac{1}{r^2} q(\underbrace{rx}_{\|\cdot\|\leqslant r}) \leqslant \frac{4}{r^2}$$
  En prenant le *sup* à gauche, on obtient
  $$N(q) \leqslant \frac{4}{r^2}$$
  D'où $\mathcal{A}$ est borné.
- $\underline{\mathcal{A}\text{ non vide}}$:
  Comme K est compact, il est borné donc il existe $M > 0$ tel que pour tout x dans K, $\|x\| \leqslant M$.
  Soit $\widetilde{q} \in Q^+$ définie par $\widetilde{q}(x) = \frac{\|x\|^2}{M^2}$. Alors, $\forall x \in K$, on a bien $\widetilde{q}(x) \leqslant 1$. Donc, $\widetilde{q}$ appartient à $\mathcal{A}$.
  D'où $\mathcal{A}$ est non vide.

Comme $\mathcal{A}$ est compact, l'application continue $q \mapsto D(q)$ atteint son maximum en $q_0 \in \mathcal{A}$.
De plus, $D(\widetilde{q}) = \frac{1}{M^2} > 0$, donc par maximalité de $D(q_0)$, on a $D(q_0) > 0$ et donc $q_0 \in Q^{++}$.

Montrons maintenant l'unicité de q_0. Supposons qu'il existe $q \neq q_0$ telle que $D(q) = D(q_0)$.
Par convexité de $\mathcal{A}$, $\frac{1}{2}(q + q_0) \in \mathcal{A}$.
Ainsi, par convexité logarithmique du déterminant sur $\mathcal{S}_n^{++}$ (voir lemme qui suit), on a :
$$D\left(\frac{1}{2}(q+q_0)\right) = \det\left(\frac{1}{2}(S + S_0)\right) > (\det S)^{\frac{1}{2}} (\det S_0)^{\frac{1}{2}} = D(q_0)$$
Ce qui est absurde par maximalité de $D(q_0)$.
D'où l'unicité et le théorème est finalement démontré.

□

Lemme (Convexité logarithmique du déterminant sur $\mathcal{S}_n^{++}$). *Soient A et B deux matrices symétriques réelles définies positives, α et β deux réels positifs tels que $\alpha+\beta=1$.*
Alors

$$\det(\alpha A+\beta B) \geqslant (\det A)^\alpha (\det B)^\beta$$

De plus, l'inégalité est stricte si $\alpha \in]0,1[$ et si $A \neq B$.

Démonstration. Soient q_A et q_B les formes quadratiques définies positives associées à A et B.
D'après le théorème de réduction simultanée, il existe une base qui est q_A-orthonormale et q_B-orthogonale.
Ainsi, il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D = diag(\lambda_1, .., \lambda_n)$ telles que :

$$A = {}^tPP \text{ et } B = {}^tPDP$$

On a donc $(\det A)^\alpha (\det B)^\beta = (\det P)^{2\alpha}((\det P)^2 \det D)^\beta = (\det P)^2 (\det D)^\beta$
car $\alpha+\beta=1$.
D'autre part, $\det(\alpha A+\beta B) = \det({}^tP(\alpha I_n + \beta D)P) = (\det P)^2 \det(\alpha I_n+\beta D)$.
Le problème revient donc à démontrer que

$$(\det(\alpha I_n + \beta D) \geqslant (\det D)^\beta$$
$$\Leftrightarrow \prod_{i=1}^n (\alpha+\beta\lambda_i) \geqslant \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i\right)^\beta$$
$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \ln(\alpha+\beta\lambda_i) \geqslant \beta \sum_{i=1}^n \ln(\lambda_i)$$

Or, par concavité du logarithme, on a

$$\forall i \in \{1,..,n\},\ \ln(\alpha+\beta\lambda_i) \geqslant \alpha\ln(1) + \beta\ln\lambda_i = \beta\ln\lambda_i$$

D'où le résultat en sommant sur i.
Dans le cas où $\alpha \in]0,1[$ et $A \neq B$, comme au moins un des $\lambda_i \neq 1$, par concavité stricte du logarithme, on obtient bien l'inégalité stricte voulue. □

<u>**Référence**</u> : Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS Algèbre 3.*

Lemme de Morse

Maylis Varvenne & Caroline Robet

Lemme de Morse. *Soit $f : U \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^3$ sur U ouvert de $\mathbb{R}^n$ tq $0 \in U$.*
Si $Df(0) = 0$, $D^2f(0)$ est non dégénérée et $sign(D^2f(0)) = (p, n-p)$
alors il existe φ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre deux voisinages de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que :
- $\varphi(0) = 0$
- $f(x) - f(0) = u_1^2 + \cdots + u_p^2 - u_{p+1}^2 \cdots - u_n^2$ *où* $u = \varphi(x)$

Lemme. *Soit $A_0 \in GL_n(\mathbb{R}) \cap S_n(\mathbb{R})$ alors il existe un voisinage V de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ et $\phi \in \mathcal{C}^1(V, GL_n(\mathbb{R}))$ tels que :*

$$\forall A \in V,\ A = {}^t\phi(A) A_0 \phi(A)$$

Démonstration du Lemme. $\varphi : \begin{array}{ll} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow S_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto {}^t M A_0 M \end{array}$ est polynomiale donc $\mathcal{C}^1$.
Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \varphi(I_n + H) - \varphi(I_n) &= {}^t(I_n + H)A_0(I_n + H) - A_0 \\ &= A_0 + A_0H + {}^tHA_0 + {}^tHA_0H - A_0 \\ &= {}^tHA_0 + A_0H + o(\|H\|) \end{aligned}$$

Or $A_0 \in S_n(\mathbb{R})$ donc ${}^tHA_0 = {}^t(A_0H)$, d'où

$$D\varphi(I_n)(H) = {}^t(A_0H) + A_0H$$

D'où $H \in Ker(D\varphi(I_n)) \Leftrightarrow A_0H \in A_n(\mathbb{R})$.
De plus, $D\varphi(I_n)$ est surjective car pour $A \in S_n(\mathbb{R})$, $D\varphi(I_n)(\frac{A_0^{-1}A}{2}) = A$

On pose $F = \{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | A_0H \in S_n(\mathbb{R})\}$.
On a $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R}) = F \oplus Ker(D\varphi(I_n))$
Soit $\psi : F \to S_n(\mathbb{R})$ la restriction de φ à F.
Sur F, $D\psi(I_n)$ est bijective car $Ker(D\varphi(I_n)) \cap F = \{0\}$.
Par le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert U de I_n dans F (que l'on peut supposer contenu dans l'ouvert des matrices inversibles) tel que ψ soit un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de U sur $V = \psi(U)$.
Ainsi, V est un voisinage ouvert de $A_0 = \psi(I_n)$ dans $S_n(\mathbb{R})$ et $\forall A \in V$, $A = {}^t\psi^{-1}(A)A_0\psi^{-1}(A)$ d'où le résultat avec $\phi = \psi^{-1}$ □

Démonstration du Lemme de Morse. On écrit la formule de Taylor à l'ordre 1 avec reste intégral au voisinage de 0.

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= Df(0)(x) + \int_0^1 (1-t)(D^2f(tx))(x,x)dt \\ &= {}^tx \left(\int_0^1 (1-t)\left(D^2f(tx)\right) dt \right) x \\ &= {}^txQ(x)x \end{aligned}$$

Q est de classe $\mathcal{C}^1$. De plus, $Q(0) \in GL_n(\mathbb{R}) \cap S_n(\mathbb{R})$ car $Q(0) = \frac{D^2 f(0)}{2}$.
On peut donc appliquer le lemme précédent :
Il existe V un voisinage de $Q(0)$ dans $\mathbb{R}^n$ et $\Phi \in \mathcal{C}^1(V, GL_n(\mathbb{R}))$ tel que

$$\forall A \in V,\ A = {}^t\Phi(A) Q(0) \Phi(A)$$

De plus comme $Q : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & S_n(\mathbb{R}) \\ x & \longmapsto & Q(x) \end{array}$ est continue, il existe un voisinage V_0 de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que $V_0 \subset Q^{-1}(V)$.
Ainsi, $\forall x \in V_0$, $Q(x) \in V$, donc

$$Q(x) = {}^t\Phi(Q(x)) Q(0) \Phi(Q(x))$$

On pose $M(x) = \Phi(Q(x))$ et on obtient

$$Q(x) = {}^t M(x) Q(0) M(x)$$

Il s'ensuit que $f(x) - f(0) = {}^t y Q(0) y$ avec $y = M(x)x$.
D'autre part, d'après le théorème d'inertie de Sylvester, $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que

$${}^t P Q(0) P = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix}$$

On a donc

$$f(x) - f(0) = {}^t(P^{-1}y)({}^t P Q(0) P)(P^{-1}y) = {}^t(P^{-1}y) \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix} (P^{-1}y)$$

En posant $u = \varphi(x)$ avec $\varphi(x) = P^{-1}y = P^{-1}M(x)x$, on a bien

- $\varphi(0) = 0$
- $f(x) - f(0) = u_1^2 + \cdots + u_p^2 - u_{p+1}^2 \cdots - u_n^2$ où $u = \varphi(x)$

Il reste à montrer que φ définit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre deux voisinages de 0.
Calculons la différentielle à l'origine de φ :

$$\begin{aligned}
\varphi(h) - \varphi(0) &= P^{-1}M(h)h \\
&= P^{-1}(M(0) + DM(0).h + o(\|h\|)h \\
&\quad \text{car } M \text{ est différentiable en 0 puisque } f \text{ est } \mathcal{C}^3 \text{ sur } U \ni 0. \\
&= P^{-1}M(0)h + o(\|h\|)
\end{aligned}$$

Comme $P^{-1}M(0) \in GL_n(\mathbb{R})$, $D\varphi(0)$ est inversible et comme $\varphi(0) = 0$, d'après la théorème d'inversion locale, il existe deux voisinages de 0 tel que φ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre ces deux voisinages.
Le théorème est donc démontré.

$\square$

<u>Référence</u> : François Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel*