171 Formes quadratiques réelles. Exemples et applications

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

I - Définitions : [ESC]

Déf 1 : Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$.

- φ est dite bilinéaire si : $\forall x, y, z \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:
  $\varphi(\lambda x + y, z) = \lambda \varphi(x, z) + \varphi(y, z)$
  $\varphi(x, \lambda y + z) = \lambda \varphi(x, y) + \varphi(x, z)$
- φ est dite symétrique si : $\forall x, y \in E$:
  $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$
- φ est dite positive (resp. négative) si, $\forall x \in E$:
  $\varphi(x, x) \geq 0$ (resp. $\varphi(x, x) \leq 0$)
- φ est dite définie si : $\forall x \in E$,
  $\varphi(x, x) = 0 \iff x = 0_E$
- φ est dite dégénérée si :
  $\exists x \in E \setminus \{0\}$, $\forall y \in E$, $\varphi(x, y) = 0$

Rq 2 : φ dégénérée $\Rightarrow$ φ non définie

Déf 3 : Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique.
On pose $q : x \in E \mapsto \varphi(x, x)$.
q est appelée forme quadratique et φ forme polaire associée à q.
q est dite positive, négative, définie, dégénérée si φ l'est.

Notation : Dans la suite, on notera q une forme quadratique sur E et φ la forme polaire associée.

Ex 4 : ① $E = \mathbb{R}^2$, $\varphi : ((x,y),(x',y')) \mapsto 3xx' + xy' + x'y$
$\hookrightarrow q : (x, y) \mapsto 3x^2 + 2xy$

② $E = \mathbb{R}^2$, φ = produit scalaire usuel (défini, positif)
$\hookrightarrow q$ = norme

Prop 5 : (identité remarquable) : Soient $x, y \in E$:
$q(x+y) = q(x) + 2\varphi(x,y) + q(y)$
$\to \varphi(x,y) = \frac{1}{2}\left(q(x+y) - q(x) - q(y)\right)$

Déf/prop 6 : Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
On pose $A := (\varphi(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n}$. A est appelée matrice associée à q dans B. En effet, on a alors :
$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in E$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $q(x) = {}^tXAX$

Ex 7 : Pour $E = \mathbb{R}^2$ et q de l'exemple 4 ①, on a : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Rq 8 : φ étant symétrique, A est symétrique. Réciproquement, toute matrice symétrique correspond à une forme quadratique.

Prop 9 (changement de base) : Soient B, B' deux bases de E, P la matrice de passage de B à B', et A la matrice associée à q dans B. On a alors :
$\forall x \in E$, $q(x) = {}^tX({}^tPAP)X$
${}^tPAP$ est la matrice associée à q dans B'.

Déf 10 : On appelle rang de q le rang de sa matrice associée dans une base de E.

Prop 11 : $\mathrm{rang}(q) = n \iff q$ non-dégénérée.

II - Orthogonalité, isotropie : [GRI]

Soit A un sous-ensemble de E.

Déf 12 : On appelle orthogonal de A l'ensemble :
$$A^{\perp} := \{x \in E \,/\, \varphi(a, x) = 0, \forall a \in A\}$$

(2)

Prop 13 : - $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.
- $\{0\}^{\perp} = E$
- $E^{\perp} = \mathrm{Ker}(\varphi)$
- $\mathrm{Ker}\,\varphi \subset A^{\perp}$

Prop 14 : - $\dim E = \dim F + \dim F^{\perp} - \dim(F \cap \mathrm{Ker}(\varphi))$
- $F^{\perp\perp} = F + \mathrm{Ker}(\varphi)$

1) Isotropie :

Déf 15 : On définit : $I(q) := \{x \in E \,/\, q(x) = 0\}$

Ex 16 : $E = \mathbb{R}^3$, $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$
$\rightarrow I(q) = \{(x_1, x_2, x_3) \in E \,/\, x_3 = \pm\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\}$ (cf annexe 1)

Prop 17 : $\mathrm{Ker}(\varphi) \subset I(q)$

Déf 18 : F est dit isotrope si $F \cap F^{\perp} \neq \{0\}$

Prop 19 : F non isotrope $\Leftrightarrow E = F \oplus F^{\perp}$

2) Bases orthogonales :

Déf 20 : Une base $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ de E est dite :
- orthogonale si : $\forall i \neq j$, $\varphi(e_i, e_j) = 0$
- orthonormale si en plus : $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $\varphi(e_i, e_i) = 1$

Dans une telle base, q s'écrit sous la forme :
$q(x) = a_1 x_1^2 + \ldots + a_n x_n^2 \quad \forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$,
sans termes "rectangles".

Th 21 : On suppose $\dim E < +\infty$. Alors il existe sur E des bases orthogonales pour q.

Prop 22 : La mise sous forme de carrés de Gauss donne une base orthogonale pour q.

Ex 23 : $E = \mathbb{R}^3$, $q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_2x_3$
$= (x_1 + x_2)^2 + 2(x_2 + 2x_3)^2 - x_3^2$

En posant $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors la base (v_1, v_2, v_3) est orthogonale pour q.

Th 24 (Théorème de Sylvester) : Il existe un entier $p \geq 0$ et $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une base orthogonale pour q dans laquelle q s'écrit :
$q(x) = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_r^2 \quad \forall x \in E$
où $r = \mathrm{rg}(q)$.

Déf 25 : On appelle $(p, r-p)$ (avec p défini comme ci-dessus) la signature de q.

Déf 26 : Soit $f \in \mathrm{End}(E)$. On suppose φ non dégénérée.
Il existe alors un unique $f^* \in \mathrm{End}(E)$ tel que :
$\forall x, y \in E, \quad \varphi(f(x), y) = \varphi(x, f^*(y))$.
f^* est appelé l'adjoint de f.

Prop 27 : - $f^{**} = f$, $(Id)^* = Id$
- $(f + g)^* = f^* + g^*$, $(\lambda f)^* = \lambda f^*$, $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$
- $\mathrm{rg}(f^*) = \mathrm{rg}(f)$, $\det(f^*) = \det(f)$.

Th 28 : On suppose q définie positive. Soit q' une autre forme quadratique sur E, de forme polaire φ'.
Alors $\exists!\, f \in \mathrm{End}(E)$: - $\varphi(x, f(y)) = \varphi'(x, y) \quad \forall x, y \in E$
- f est adjoint pour q et $f \circ f^* = Id$.

$\Rightarrow$ Il existe une base orthogonale pour q et q'.

[FGN] **Th 29** (Ellipsoïde de John-Loewner)
Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$.
Il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K. $\boxed{\text{DEV 1}}$

3) Groupe orthogonal :

On supposera dans cette partie q non dégénérée.

Prop 30 : Soit $f \in End(E)$. LASSE :
a) $q(f(x)) = x \quad \forall x \in E$
b) $\varphi(f(x), f(y)) = \varphi(x,y) \quad \forall x,y \in E$
c) $f \circ f^* = Id$

Déf/prop 31 : On définit $O(q) := \{ f \in End(E) \,/\, f^* \circ f = Id \}$
- Si $f, g \in O(q)$, $f \circ g \in O(q)$
- Si $f \in O(q)$, $f^{-1} \in O(q)$

$(O(q), \circ)$ est donc un groupe appelé groupe orthogonal de q.

Prop 32 : - $O(q)$ est engendré par les réflexions
- $O(q)$ est compact.

III Applications :

[GRI] ### 1) Classification des coniques non dégénérées :

Déf 33 : Soit l une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$, k un réel et q une forme quadratique non nulle.
On appelle conique l'ensemble des $u \in \mathbb{R}^2$ vérifiant
$$q(u) + l(u) = k$$

Th 34 : Il est possible de classer une conique $\mathcal{C}$ en fonction de la forme quadratique associée q :

Si $\mathcal{C}$ est non vide et non réduite à un point, alors :
- $sign(q) = (2,0) \Rightarrow \mathcal{C}$ est une ellipse
- $sign(q) = (1,1) \Rightarrow \mathcal{C}$ est une hyperbole
- $sign(q) = (1,0) \Rightarrow \mathcal{C}$ est une parabole. (cf annexe 2)

2) Géométrie différentielle : [GOU].

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$.

Déf 35 : On suppose f deux fois différentiable en a.
On définit alors la matrice hessienne de f en a :
$$D^2 f(a) := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

Th 36 (Lemme de Morse) : On suppose : f de classe $\mathcal{C}^\infty$,
$df_0 := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right) = 0$, $f(0) = 0$ et $D^2 f(0)$ est inversible.
Il existe alors un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme $\varphi := (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ défini sur un voisinage W de 0 et $r \in \mathbb{Z}$ tels que :
$$\forall x \in W,\ f(x) = (\varphi_1(x))^2 + \dots + (\varphi_r(x))^2 - (\varphi_{r+1}(x))^2 - \dots - (\varphi_n(x))^2$$

$\boxed{\text{DEV 2}}$

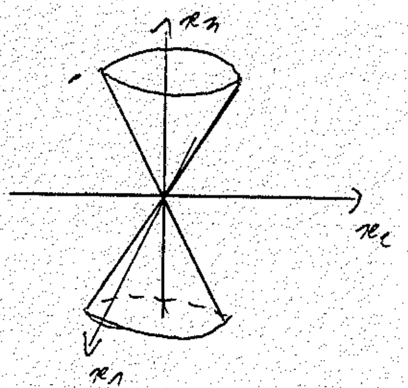
Références : [ESC] : Escofier ; "Toute l'algèbre de la licence."
[GRI] : Grifone ; "Algèbre linéaire"
[GOU] : Gourdon ; "Analyse"
[FGN] : Francinou, Gianella, Nicolas ; "Oraux X-ENS, algèbre 3".
[ROU] : Rouvière ; "Petit guide de calcul différentiel".

! Hiriart-Urruty Plusquellec exos cools

Annexe :

Cônes isotropiques :

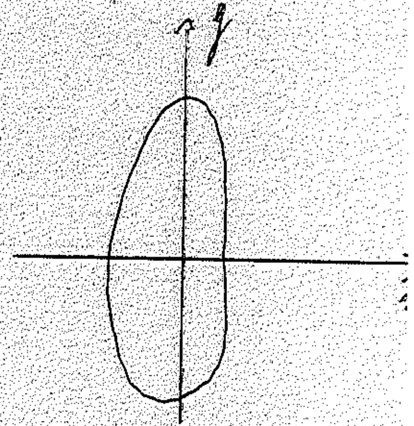
$q(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$



Classification des coniques :

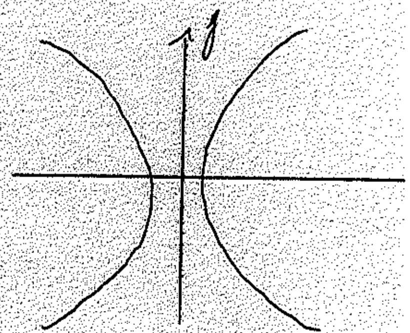
- $\mathrm{sign}(q) = (2,0)$

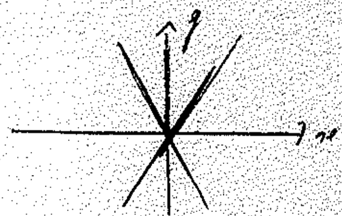
Ellipse : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

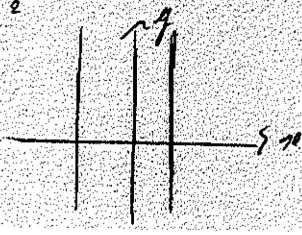


- $\mathrm{sign}(q) = (1,1)$

Hyperbole : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

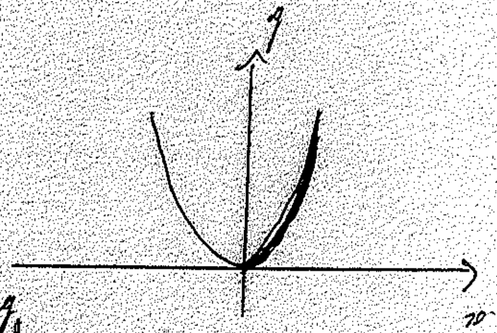






- $\mathrm{sign}(q) = (1,0)$

Parabole $y = ax^2$



Théorème 1 (LEMME DE MORSE). *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞, nulle en 0, telle que $df_0 = 0$. On suppose de plus que $D^2f(0)$ est inversible.*
Alors il existe un C^∞-difféomorphisme $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ défini sur un voisinage W de 0, et un entier r tels que :

$$\forall x \in W, f(x) = [\varphi_1(x)]^2 + \dots + [\varphi_r(x)]^2 - [\varphi_{r+1}(x)]^2 - \dots - [\varphi_n(x)]^2$$

Résultats préliminaires :

Lemme 1 (LEMME D'HADAMARD (admis)). *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞, telle que $f(0) = df_0 = 0$.*
On peut alors écrire :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \le i,j \le n} x_i x_j h_{i,j}(x_1, \dots, x_n)$$

Lemme 2. *On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on fixe $A \in \mathcal{S}$ inversible.*
Il existe alors un voisinage ouvert V de A dans $\mathcal{S}$ et une application $g : V \to GL_n(\mathbb{R})$ de classe C^∞ telle que pour tout $B \in V$, ${}^tg(B)Dg(B) = B$, où D est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1 ou -1.

Démonstration 1 (lemme 2). *Soit $F = \{U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | {}^tUA = AU\}$. On peut commencer par dire que $\Omega := F \bigcap GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de F.*
On pose $\varphi : U \in \Omega \mapsto {}^tUAU \in \mathcal{S}$. φ est C^∞ car polynomiale en les coefficients de U. Comme $I_n \in \Omega$, on calcule $d\varphi_{I_n}$: soit $H \in F$ tel que $I_n + H \in \Omega$,

$$d\varphi_{I_n}(H) = \varphi(I_n + H) - \varphi(I_n) = 2AH$$

$d\varphi_{I_n}$ est injective : soit $H \in Ker(d\varphi_{I_n})$, on a $AH = 0$ donc $H = 0$ car A inversible.
$d\varphi_{I_n}$ est surjective : soit $S \in \mathcal{S}$, alors on pose $H = \frac{1}{2}A^{-1}S$ et on obtient $d\varphi_{I_n}(H) = S$.
D'après le théorème d'inversion locale, φ est donc un C^∞-difféomorphisme local en I_n. Il existe donc un voisinage ouvert W de I_n dans Ω et un voisinage ouvert V de $\varphi(I_n) = A$ dans $\mathcal{S}$ tel que $\varphi_{|W}$ soit un C^∞-difféomorphisme de W sur V.
Soit h son inverse. h est C^∞ et pour tout $B \in V$, $\varphi(h(B)) = {}^th(B)Ah(B) = B$.
On rappelle que $X \mapsto {}^tXAX$ est une forme quadratique de signature (p, q) avec $p + q = n$ car A est inversible. Donc il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $A = {}^tPDP$ avec D la matrice diagonale qui respecte la signature (p, q).
L'application $g : V \to GL_n(\mathbb{R})$ telle que $g(B) = Ph(B)$ est C^∞ et pour tout $B \in V$:

$${}^tg(B)Dg(B) = {}^t(Ph(B))D(Ph(B)) = {}^th(B)Ah(B) = B$$

Démonstration du lemme de Morse :
D'après le lemme 1, on peut trouver n^2 fonctions $h_{i,j} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \sum_{i,j} x_i x_j h_{i,j}(x)$$

On pose pour tout (i, j) : $a_{i,j}(x) = \frac{1}{2}[h_{i,j}(x) + h_{j,i}(x)]$, et pour tout x : $A(x) = (a_{i,j}(x))_{1 \leq i,j \leq n}$.
On note $(r, n-r)$ la signature de la forme quadratique : $X \in \mathbb{R}^n \mapsto {}^tXA(0)X$.
On peut remarquer que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $A(X)$ est symétrique et $f(X) = {}^tXA(X)X$. De plus, $A(0) = D^2f(0)$ et est donc inversible.
On peut donc appliquer le lemme 2 à la matrice $A(0)$: il existe une un voisinage ouvert V de $A(0)$ dans $\mathcal{S}$ et une fonction $g : V \to GL_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que ${}^tg(B)Dg(B) = B$ pour tout $B \in V$, où D est la matrice diagonale dont les r premiers éléments diagonaux sont égaux à 1 et les $n - r$ derniers égaux à -1.
Comme $X \mapsto A(X)$ est continue, il existe un voisinage W de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que $A(X) \in V$ pour tout $X \in W$. On a donc $A(X) = {}^tg[A(x)]Dg[A(x)]$ pour tout $X \in W$, et on en déduit :

$$\forall X \in W, \quad f(X) = {}^tXA(X)X = {}^t\varphi(X)D\varphi(X)$$

où $\varphi(X) = g[A(X)]X$.
En notant $\varphi_1(X), \ldots, \varphi_n(X)$ les coordonnées de $\varphi(X)$, ceci s'écrit aussi :

$$\forall X \in W, \quad f(X) = \varphi_1(X)^2 + \cdots + \varphi_r(X)^2 - \varphi_{r+1}(X)^2 - \cdots - \varphi_n(X)^2$$

Ce n'est pas tout à fait fini : on a $d\varphi_0 = g[A(0)] \in GL_n(\mathbb{R})$, donc quitte à restreindre W, on peut supposer (d'après le théorème d'inversion locale) que φ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de W sur $\varphi(W)$. On a bien sûr $\varphi(0) = g[A(0)]0 = 0$.

Théorème 1. *Soit K un compact non vide de $\mathbb{R}^n$. Il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K.*

Lemme 1. *Soient A et B deux matrices symétriques réelles définies positives, a et b deux réels positifs tels que $a + b = 1$, alors :*

$$\det(aA + bB) \geqslant \det(A)^a \det(B)^b$$

(avec inégalité stricte si $a \neq 0$ ou 1).

Démonstration : On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne usuelle.
Comme nous venons de le dire en préambule, un ellipsoïdeplein centré en 0 de $\mathbb{R}^n$ a une équation du type $q(x) \leqslant 1$, où q est une forme quadratique définie positive. On notera Q (respectivement Q_+, respectivement Q_{++}) l'ensemble des formes quadratiques (respectivement définies, respectivement définies positives) de $\mathbb{R}^n$ et pour $q \in Q_{++}$, on pose $\mathcal{E}_q = \{x \in \mathbb{R}^n, q(x) \leqslant 1\}$.
Commençons par calculer le volume V_q de $\mathcal{E}_q$. Il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ dans laquelle q s'écrit $q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$. On obtient :

$$V_q = \int \dots \int_{a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2 \leqslant 1} dx_1 \dots dx_n$$

On considère le changement de variables défini par $x_i = \dfrac{t_i}{\sqrt{a_i}}$ (c'est bien un C^1-difféomorphisme), dont le jacobien est $\dfrac{1}{\sqrt{a_1 \dots a_n}}$. On observe que si S est la matrice de q dans une base orthonormale quelconque de $\mathbb{R}^n$, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $S = PDiag(a_1, \dots, a_n)\, {}^tP$. On a donc $\det S = \det Diag(a_1, \dots, a_n) = a_1 \dots a_n$. Ce déterminant ne dépend donc pas de la base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ choisie. Notons-le $D(q)$. Le chanquement de variables dans l'intégrale multiple donne :

$$V_q = \int \dots \int_{x_1^2 + \dots + x_n^2 \leqslant 1} \frac{dx_1 \dots dx_n}{sqrt D(q)} = \frac{V_0}{\sqrt{D(q)}}$$

où V_0 est le volume de la boule unité pour la norme euclidienne canonique.
Le problème peut donc se reformuler ainsi : il s'agit de montrer que si K est un compact non vide de $\mathbb{R}^n$, il existe une unique forme quadratique $q \in Q_{++}$ telle que $D(q)$ soit maximal et que pour tout $x \in K$, $q(x) \leqslant 1$.
On munit l'espace Q de la norme N définie par : $N(q) = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |q(x)|$. Il est alors naturel de considérer l'ensemble :

$$\mathcal{A} = \{q \in Q_+, \forall x \in K, q(x) \leqslant 1\}$$

puis de chercher à maximiser D sur ce domaine. Montrons que $\mathcal{A}$ est un compact convexe non vide de Q.

- $\mathcal{A}$ est convexe :
  soient q et q' dans $\mathcal{A}$ et $\lambda \in [0, 1]$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

  $$(\lambda q + (1 - \lambda) q')(x) = \lambda q(x) + (1 - \lambda) q'(x) \geqslant 0$$

  et $\lambda q + (1 - \lambda) q'$ est une forme quadratique positive. De plus, si $x \in K$:

  $$(\lambda q + (1 - \lambda) q')(x) \leqslant \lambda q(x) + (1 - \lambda) q'(x) \leqslant \lambda + 1 - \lambda = 1$$

  ce qui entraîne $\lambda q + (1 - \lambda) q' \in \mathcal{A}$.

- $\mathcal{A}$ est fermé :
Soit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{A}$ convergente dans Q vers q. On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$: $|q(x) - q_n(x)| \leqslant N(q - q_n)\|x\|$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} q_n(x) = q(x)$. On en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, q(x) = \lim_{n\to\infty} q_n(x) \leqslant 0 \textit{ et } \forall x \in K, q(x) = \lim_{n\to\infty} q_n(x) \geqslant 1$$

donc $q \in \mathcal{A}$.

- $\mathcal{A}$ est borné :
Comme K est d'intérieur non vide, il existe $a \in K$ et $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset K$. Soit $q \in \mathcal{A}$. Si $\|x\| \leqslant r$, alors $a + x \in K$ donc $q(a + x) \leqslant 1$. D'autre part, on a $q(-a) = q(a) \leqslant 1$.
Par l'inégalité de Minkowski, on obtient :

$$\sqrt{q(x)} = \sqrt{q(x + a - a)} \leqslant \sqrt{q(x + a)} + \sqrt{q(-a)} \leqslant 2$$

donc $q(x) \leqslant 4$. Si $\|x\| \leqslant 1$, $|q(x)| = q(x) \leqslant \frac{1}{r^2} q(rx) \leqslant \frac{4}{r^2}$, ce qui montre que $N(q) \leqslant \frac{4}{r^2}$.

- $\mathcal{A}$ est non vide :
Puisque K est compact, il est borné : soit $M >$ tel que pour tout $x \in K$, $\|x\| \leqslant M$. Alors si q est définie par $q(x) = \frac{\|x\|^2}{M^2}$, on a, pour tout $x \in K$: $q(x) \leqslant 1$.

Bilan : $\mathcal{A}$ est un compact convexe non vide de Q.
L'application déterminant est continue donc $q \mapsto D(q)$ est continue sur le compact $\mathcal{A}$. Elle atteint donc son maximum sur $\mathcal{A}$, en q_0. Comme $\mathcal{A}$ contient $x \mapsto \frac{\|x\|^2}{M^2}$ qui est définie positive, on a $D(q_0) > 0$ donc $q_0 \in Q_{++}$.
Nous venons donc de prouver qu'il existe un ellipsoïde $\mathcal{E}_{q_0}$ de volume minimal contenant K.

Il resteà prouver que cet ellipsoïde est unique, *i.e.* que q_0 est unique.
Supposons qu'il existe $q \in \mathcal{A}$ tel que $D(q) = D(q_0)$ et $q \neq q_0$. Soient S et S_0 les matrices de q et q_0 dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Comme $\mathcal{A}$ est convexe, $\frac{2}{2}(q + q_0)$ appartient à $\mathcal{A}$ et d'après le lemme, on a :

$$D(\frac{1}{2}(q + q_0)) = \det(\frac{1}{2}(S + S_0)) > (\det S)^{\frac{1}{2}}(\det S_0)^{\frac{1}{2}} \geqslant \det S_0 \geqslant D(q_0)$$

ce qui contredit la maximalité de $D(q_0)$.

Conclusion : il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K.