171. Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications

Cadre : on travaillera sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n$, noté $E$.

## I Introduction aux formes quadratiques :

### 1) Définition et premières propriétés :

**Définition 1 :** Soient $E$ et $F$ des $\mathbb{R}$-ev et une application $\varphi : E\times F \to \mathbb{R}$. On dit que $\varphi$ est bilinéaire si $\varphi(\cdot,x)$ et $\varphi(y,\cdot)$ sont linéaires pour tout $x,y \in F\times E$. De plus, $\varphi$ est symétrique si $\forall (x,y)\in E^2$, $\varphi(x,y)=\varphi(y,x)$.

**Définition 2 :** Une forme quadratique est une application de la forme $q : E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \varphi(x,x)$ où $\varphi$ est une forme bilinéaire symétrique.

**Exemple 3 :** Dans $\mathbb{R}^3$, $q(x,y,z) = 3x^2+y^2+2xy-3xz$ est une forme quadratique. Dans $\mathbb{R}[X]$, $q : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ définie par $q(P) = \int_0^1 (PP'')(x)\,dx$ en est une.

**Propriété 4 :** Soit $q$ une forme quadratique sur $E$. Il existe une unique forme bilinéaire $\varphi$ tq $\forall x\in E$, $q(x)=\varphi(x,x)$ et $\varphi$ soit bilinéaire. $\varphi$ est la forme polaire de $q$.

**Prop 5 :** Soit $\varphi$ la forme polaire associée à la forme quadratique $q$. Alors : $\varphi(x,y) = \frac{1}{4}(q(x+y)-q(x-y)) = \frac{1}{2}(q(x+y)-q(x)-q(y))$.

**Exemple 6 :** Le produit scalaire dans $M_n(\mathbb{R})$ a pour forme polaire : $\varphi(A,B) = tr({}^tAB)$.

Ecriture en dimension finie : Si $B=(e_1,\dots,e_n)$ est une base de $E$, si $x=\sum x_ie_i$ et $y=\sum y_ie_i$, $\varphi(x,y) = \sum_{1\le i,j\le n} x_iy_j\varphi(e_i,e_j) = {}^tXMY$ avec $M=\varphi(e_i,e_j)\in M_n(\mathbb{R})$ et $X=\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$ $Y=\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix}$

**Définition 7 :** La matrice $M$ est la matrice de $q$ dans la base $B$. Le rang de $q$ est le rang de $M$.

**Exemple 8 :** La matrice de la forme quadratique de l'exemple est $M=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3/2\\ 1 & 1 & 0\\ -3/2 & 0 & 0\end{pmatrix}$ dans la base canonique. Elle est donc de rang 3.

**Propriété 9 (Changt de base) :** Soit $B,B'$ deux bases de $E$, $P=Mat_B(B')$ la matrice de passage, $M=Mat_B(q)$ et $M'=Mat_{B'}(q)$. Alors $M'={}^tPMP$.

**Remarque 10 :** Le rang est invariant par chgt de base.

**Définition 11 :** Le noyau de $q$ est le sev de $E$, noté $\ker q$ défini par $\ker q = \{x\in E \,/\, \forall y \in E,\ \varphi(x,y)=0\}$ avec $\varphi$ la forme polaire de $q$. La forme $q$ est non dégénérée si $\ker q=\{0\}$ et dégénérée dans le cas contraire.

**Rem 12 :** $\dim E = rg\,\varphi + \dim\ker q$

**Exemple 13 :** $\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x,y)\mapsto xy$ est non-dégénérée. $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(x,y)\mapsto x^2$ est dégénérée.

### 2) Forme quadratique positive, définie positive :

**Définition 14 :** Si $q$ est une forme quadratique, $q$ est définie si $q(x)=0 \iff x=0$.
$q$ est positive si $\forall x\in E$, $q(x)\ge 0$.

**Exemple 15 :** $q_1(A) = tr(A)^2$ est positive mais non définie car $q_1\left(\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right) =$

**Proposition 16 :** Si $q$ est définie, $q$ est non dégénérée.

**Rq 17 :** La réciproque est fausse : $q(x,y) = x^2-y^2$ est non dégénérée mais pas définie : $q(x,x)=0$.

**Théorème 18 :** Inégalité de Schwarz : Si $q$ est positive, $\forall x,y\in E^2$ : $|q(x,y)|^2 \le q(x)q(y)$. Si de plus $q$ est définie, il y a égalité ssi $x$ et $y$ sont liés.

**Corollaire 19 :** Si $q$ est positive, $\forall (x,y)\in E^2$, $\sqrt{q(x+y)} \le \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}$

## II. Orthogonalité et isotropie :

existe une leçon, enlevée ou raccourcie

### 1) Orthogonalité :

Définition 20. Deux vecteurs $x, y \in E$ sont orthogonaux selon $q$ si $\varphi(x,y)=0$.
Pour $A \subset E$, l'orthogonal de $A$ selon $q$ est $A^\perp = \{y \in E / \forall x \in A, \varphi(x,y)=0\}$

Deux parties $A$ et $B$ de $E$ sont orthogonales si $\forall x \in A\ \forall y \in B$ $\varphi(x,y)=0$.

Proposition 21 : Si $A \subset E$, $A^\perp$ est un sev de $E$. • Pour $F \subset E$, $F \subset F^{\perp\perp}$
• $\mathrm{Ker}\, q = E^\perp$. • Si $A \subset B \subset E$, $B^\perp \subset A^\perp$.

Définition 22 : Une base $\mathcal{B}$ de $E$ est orthogonale si $\forall e_i \neq e_j \in \mathcal{B}$, $\varphi(e_i, e_j)=0$

Théorème 23 : Si $E$ est de dimension finie, il existe une base $q$ orthogonale pour $q$. Si cette base est $\mathcal{B} = (e_1 \dots e_n)$ alors $q\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i^2 q(e_i)$
la matrice de $q$ dans $\mathcal{B}$ est diagonale.

Proposition 24 : Si $E$ est de dimension finie, tout sev $F \subset E$ vérifie :
$$\dim F + \dim F^\perp = \dim E + \dim(F \cap \mathrm{Ker}\, q)$$

Corollaire 25 : Si $q$ est non dégénérée, $F^{\perp\perp} = F$.

### 2) Isotropie :

Définition 26 : Le cone isotrope, noté $Co(q)$ est $Co(q) := \{x \in E, q(x)=0\}$

Exemple 27 : $E = \mathbb{R}^2$, $q(x_1,x_2) = x_1^2 - x_2^2$, $Co(q) = \{(x_1,x_2), x_1 = \pm x_2\}$.

Remarque 28 : $\mathrm{Ker}\, q \subset Co(q)$

Définition 29 : Un sous-espace $F$ de $E$ est isotrope si $F \cap F^\perp \neq \{0\}$
Un sous-espace $F$ de $E$ est totalement isotrope si $\varphi_{|F}=0$, avec $\varphi$ la forme polaire de $q$.

Exemple 30 : $q(x_1,x_2) = x_1^2 - x_2^2$ alors $F = \{(x,x), x \in \mathbb{R}\}$ est un espace totalement isotrope.

### 3) Groupe orthogonal associé à une forme quadratique :

Propriété 31 : Soit $E$ ev de dimension finie, $q$ non dégénérée. Il y a équivalence entre
i) $q(f(x)) = q(x)$ $\forall x \in E$ avec $f \in \mathcal{L}(E)$
ii) $\varphi(f(x), f(y)) = \varphi(x,y)$ $\forall x, y \in E$, $f \in \mathcal{L}(E)$
L'endomorphisme $f$ est dit orthogonal pour $q$.

Prop 31 : Soit $O(q) = \{f \in \mathcal{L}(E) / q(f(x)) = q(x)\ \forall x \in E\}$. Alors $O(q)$ est un groupe. C'est le groupe orthogonal de $q$.

Prop 32 : Soit $\mathcal{B} = (e_i)$ base de $E$, $M = \mathrm{Mat}_\mathcal{B}(q)$ $A = \mathrm{Mat}_\mathcal{B}(f)$. Alors
$f \in O(q) \iff {}^tAMA = M$

Propriété 33 : Soit $q$ et $q'$ deux formes quadratiques et $u \in \mathrm{Aut}(E)$ tq $q'(x) = q(u(x))$ $\forall x \in E$. Alors $O(q)$ et $O(q')$ sont conjugués.
Précisément : $f \in O(q) \mapsto u^{-1} f u \in O(q')$ est un morphisme de groupe.

Exemple 34 : On note $O(p,q) = O(h)$ avec $h$ la forme quadratique
$h : \mathbb{R}^{p+q} \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x_1 \dots x_{p+q}) \longmapsto \sum_{i=1}^p x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} x_i^2$. $O(n,0)$ est souvent noté $O_n(\mathbb{R})$

Exemple 35 : Soit $q(x) = 2x_1 x_2$ pour $x \in \mathbb{R}^2$. $O(q) = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1/b & 0 \end{pmatrix} / a, b \in \mathbb{R}\right.$

Théorème 36 (Décomposition polaire) : On a un homéomorphisme
$\mu : O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$
$(O, S) \longmapsto OS$

Corollaire 37 : $O_n(\mathbb{R})$ est maximal parmi les sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$

Proposition 38 : Tout sous-groupe compact $G$ de $GL_n(\mathbb{R})$ est conjugué à un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$. ] DEV

## III. Réduction et classification des formes quadratiques.

### 1) Réduction simultanée :

Théorème 39 : Soit q une forme quadratique définie positive et q' une forme quadratique. Alors il existe une base orthonormée pour q orthogonale pour q'.

Appli 40 : Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, $\alpha+\beta=1$, $A, B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Alors $\det(\alpha A+\beta B) \geq \det A^\alpha \det B^\beta$

Appli 41 : John-Loewner : Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$ alors il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K. ] DEV

Théorème 42 : $\exp : S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

Corollaire 43. $GL_n(\mathbb{R}) \simeq O_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ (en tant qu'espace topologique)*.

### 2) Théorème de Sylvester :

Méthode de Gauss 44 : Pour toute forme quadratique q, il existe $r = \mathrm{rg}\, q$ formes linéaires indépendantes $l_1 \dots l_r$ tq : $q = \sum_{i=1}^r a_i l_i^2$, $a_i \in \mathbb{R}$.

Ex 45. Dans $\mathbb{R}^3$, $q(x,y,z) = x^2 - 2y^2 + xz + yz = (x + z/2)^2 - 2(y - \frac{z}{4})^2 - \frac{z^2}{8}$

Théorème de Sylvester 46 : Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$ et q une forme quadratique sur E non dégénérée. Alors il existe une base $(e_i)$ de E tq $\mathrm{Mat}_{(e_i)}(q) = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $q(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \sum_{i=1}^p x_i^2 - \sum_{i=p+1}^r x_i^2$

De plus, le couple $(p, r-p)$ est intrinsèque à q : $p = \max\{\dim F, q_{|F}$ est définie positive$\}$
$r-p = \max\{\dim F, q_{|F}$ définie négative$\}$.

Définition 47 Le couple $(p, r-p)$ est la signature de q

Corollaire 48 q et q' sont $\mathbb{R}$-équivalentes (ie $\exists u \in \mathrm{Aut}\, E$, $q' = q \circ u$) ssi elles ont même signature

Exemple 49. La signature de l'exemple est (1, 2). Elle est donc équivalente
$q(x,y,z) = x^2 - y^2 - z^2$.

## IV. Application à la géométrie

### 1) Classification des coniques : allonger + exemple

Définition 50. Soient q une forme quadratique non nulle et l une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$
On appelle conique l'ensemble $\mathcal{C}$ des $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tq : $q(x,y) + l(x,y) = h \in \mathbb{R}$ (*)
Quitte à changer les variables on peut supposer (*) par $aX^2 + bY^2 - 2rX - 2sY =$

Théorème 51 : Soit $\mathcal{C}$ une conique non réduite à un point. Alors :

i) Si $\mathrm{sign}(q) = (2,0)$ $\mathcal{C}$ est une ellipse : si $x = (X - r/a)$ et $y = (Y - s/b)$
$ax^2+by^2=h$, $a>0$ $b>0$ $h>0$

ii) Si $\mathrm{sign}(q) = (1,1)$ alors $\mathcal{C}$ est une hyperbole éventuellement dégénérée en deux droites sécantes $ab<0$ : $A>0 \Rightarrow \frac{x^2}{A^2} - y^2/B^2 = 1$ avec $A = \sqrt{h/a}$, $B = \sqrt{-h/b}$

iii) Si $\mathrm{sign}(q) = (1,0)$, $\mathcal{C}$ est une parabole qui peut dégénérer en une droite
car si $a \neq 0$ et $b = 0$ : $a(X - \frac{r}{a})^2 - 2sY = h$
ou alors
$a(X - r/a)^2 = 0$ une ou deux droites parallèles.

### 2) Géométrie différentielle  exemple

Définition 52 : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable. a est un point critique si $Df(a) = 0$.

Proposition : La hessienne de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ est $\left(\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$. Elle peut être vue comme une forme quadratique. $Q(h) = \sum_i h_i^2 \frac{\partial f}{\partial x_i^2}(a) + 2 \sum_{i<j} h_i h_j \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$

**Prop 53 :** Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $U$ ouvert $a \in U$ un point critique de $f$.
Soit $Q$ la forme quadratique associée à la hessienne de $f$ en $a$.

1) Si $q$ est défini positive (resp négative) alors $f$ admet un minimum (resp maximum) relatif en $a$.

2) Si $q$ n'est ni positive ni négative en $a$, $f$ n'admet pas d'extremum relatifs en $a$.

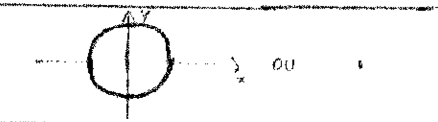
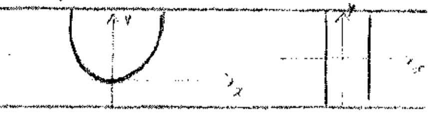
**Théorème 54 :** (Morse) Soit $f : U \to \mathbb{R}$ $C^3$ sur $U$ ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant $0$. Si $Df(0)=0$ et $D^2f(0)$ est non dégénérée avec $\mathrm{sign}(D^2f(0)) = (p, n-p)$ alors il existe $\varphi$ un difféomorphisme $C^1$ entre deux voisinages de $0$ dans $\mathbb{R}^n$ tq $\varphi(0)=0$ et :

$$f(x)-f(0) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2 \quad u = \varphi(x).$$

**Théorème 55 :** Considérons le système différentiel $\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = x \end{cases}$, avec $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $C^1$ et $f(0)=0$. Si $Df(0)$ a toutes ses valeurs propres de partie réelle strictement négative, pour $x$ assez voisin de zéro, la solution $y_x(t)$ tend vers $0$ exponentiellement en $+\infty$.

**Annexe :**

* Coniques

| sign(q) | équation réduite | représentation graphique |
|---|---|---|
| (2,0) (ellipse) | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ |  |
| (1,1) (hyperbole ou droites) | $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ |  |
| (1,0) (parabole) | $y = ax^2$ |  |

⚠ les représentations peuvent être vide ($x^2+y^2=-1$)