171

Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications

Cadre : Soit E un $\mathbb{R}$-ev

I - Généralités.

A) Formes quadratiques réelles et algèbre bilinéaire.

Définition 1 : On appelle forme quadratique sur E toute application ϕ de la forme $\phi : E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \varphi(x,x)$ où φ est une forme bilinéaire symétrique sur E.

Proposition 2 : Il existe une unique forme bilinéaire symétrique φ telle que pour tout $x \in E$, $\phi(x) = \varphi(x,x)$. La forme bilinéaire φ s'appelle la forme polaire de ϕ et on a :
$\forall (x,y) \in E^2$, $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}[\phi(x+y) - \phi(x) - \phi(y)] = \frac{1}{4}[\phi(x+y) - \phi(x-y)]$.

Exemple 3 : • $\phi(x) = \sum a_{ii} x_i^2 + \sum_{i<j} (a_{ij} + a_{ji}) x_i x_j$ de forme polaire :
$\varphi(x,y) = \sum a_{ii} x_i y_i + \frac{1}{2} \sum_{i<j} a_{ij} (x_i y_j + x_j y_i)$.
• L'application $A \to tr({}^tAA)$ est la forme quadratique sur $M_n(\mathbb{R})$ associée à la forme bilinéaire symétrique $(A,B) \to tr({}^tAB)$.

Définition 4 : Soit E de dimension finie, et $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \le i \le n}$ une base de E. On appelle matrice de ϕ dans la base $\mathcal{B}$ la matrice $A = (\varphi(e_i, e_j))_{1 \le i, j \le n}$ de la forme polaire φ de ϕ dans la base $\mathcal{B}$ et rang de ϕ le rang de cette matrice.

Proposition 5 : Soit ϕ une forme quadratique sur E représentée dans $\mathcal{B}$ par une matrice A. Alors, ϕ est représentée analytiquement dans $\mathcal{B}$ par $X \mapsto {}^tXAX$. Soit $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$. Alors $M_{\mathcal{B}_2}(\phi) = {}^tP M_{\mathcal{B}_1}(\phi) P$.

Remarque 6 : Si $P = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} 2\beta_{ij} X_i X_j$ et $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_{ij} \\ \beta_{ji} & \alpha_n \end{pmatrix}$
La fonction polynomiale $(x_1, \dots, x_n) \mapsto P(x_1, \dots, x_n)$ se réécrit matriciellement $X \mapsto {}^tXAX$. Elle représente donc dans $\mathcal{B}$ une forme quadratique.

Exemple 7 : (i) La fonction $(x,y,z) \mapsto x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 2xy - 4xz + 4yz$ est la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ canoniquement associée à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Elle est représentée dans la base canonique par le polynôme homogène $X^2 + 2Y^2 - 3Z^2 + 2XY - 4XZ + 4YZ$.
(ii) Dans la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$, la forme quadratique $A \mapsto tr({}^tAA)$ est représentée par le polynôme homogène $\sum_{(i,j) \in [1,n]^2} X_{ij}^2$
(iii) Le déterminant de $M_2(\mathbb{R})$ est représenté dans la base canonique $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ par le polynôme $X_1 X_4 - X_2 X_3$.

B) Isotropie, orthogonalité

Définition 9 : On appelle cône isotrope de ϕ l'ensemble $C_\phi = \{x \in E, \phi(x) = 0\}$. On dit que ϕ est définie si $C_\phi = \{0\}$. Un vecteur $x \in E$ est dit isotrope si $\phi(x) = 0$, i.e $x \in C_\phi$.

Définition 10 : Deux vecteurs x et y sont dit orthogonaux selon ϕ si $\varphi(x,y) = 0$. Soit $A \subset E$. On appelle orthogonal de A selon ϕ l'ensemble $A^\perp = \{y \in E \mid \forall x \in A, \varphi(x,y) = 0\}$.

Définition 11 : On appelle noyau de ϕ le sev de E noté $Ker\,\phi$ défini par $Ker\,\phi = E^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in E, \varphi(x,y) = 0\}$. La forme ϕ est dite non dégénérée si $Ker\,\phi = \{0\}$, dégénérée si $Ker\,\phi \neq \{0\}$.

Proposition 12 : On a $Ker\,\phi \subset C_\phi$. En particulier, si ϕ est définie, alors ϕ est non dégénérée.

Remarque 13 : La réciproque est fausse. Par exemple, si $\phi(x) = \phi(x,y) = x^2 - y^2$, ϕ est non dégénérée mais n'est pas définie puisque pour tout x, $\phi((x,x)) = \phi((x,-x)) = 0$.

Proposition 14 : Supposons E de dimension finie. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. En identifiant les vecteurs de E et leur représentation en vecteurs colonne dans la base $\mathcal{B}$, on a $Ker\,\phi = Ker\,A$, où A désigne la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{B}$.

C) Formes quadratiques positives

Définition 15 : On dira que ϕ est positive si pour tout $x \in E$, $\phi(x) \geq 0$.

Théorème 16 : (Inégalité de Cauchy-Schwarz). Si ϕ est positive, alors $\forall (x,y) \in E^2$, $\varphi(x,y)^2 \leq \phi(x)\phi(y)$.
Si de plus ϕ est définie, il y a égalité si et seulement si x et y forment une famille liée.

Corollaire 17 : Si ϕ est positive, alors $C_\phi = Ker\,\phi$. En particulier une forme positive ϕ est définie si et seulement si elle est non dégénérée.

Corollaire 18 : (Inégalité de Minkowski). Si ϕ est positive, alors $\forall (x,y) \in E^2$, $\sqrt{\phi(x+y)} \leq \sqrt{\phi(x)} + \sqrt{\phi(y)}$. Si ϕ est positive, $\sqrt{\phi}$ définit une semi-norme. Si de plus ϕ est définie $\sqrt{\phi}$ est une norme.

II- Réduction des formes quadratiques

A) Réduction de Gauss

<u>Définition 19:</u> Une base $\mathcal{B}$ de E est dite ϕ-orthogonale si pour tout couple d'éléments distincts (e,e') de $\mathcal{B}$ on a $\varphi(e,e')=0$.

<u>Remarque 20:</u> En dimension finie, si $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ est une base ϕ-orthogonale, alors: $\forall (x_i)\in\mathbb{K}^n$, $\phi(\sum_{i=1}^n x_i e_i)=\sum_{i=1}^n x_i^2\phi(e_i)$.
Autrement dit, la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale.

<u>Théorème 21:</u> Soit E un espace vectoriel euclidien. Si ϕ est une forme quadratique sur E, alors il existe une base orthonormée pour le produit scalaire et orthogonale pour ϕ.

<u>Remarque 22:</u> En dimension finie on a l'existence d'une base $(e_1,\dots,e_n)$ ϕ-orthogonale. En posant $\lambda_i=\phi(e_i)$ on a:
$\forall x\in E, \phi(x)=\phi(\sum_{i=1}^n e_i^*(x)e_i)=\sum_{i=1}^n\lambda_i(e_i^*(x))^2$.

<u>Méthode de Gauss:</u> Ecrire $\phi(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2+\sum_{1\leq i<j\leq n}a_{ij}x_ix_j$ comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.

<u>Cas 1:</u> $a=a_{11}\neq 0$; $\phi(x_1,\dots,x_n)=ax_1^2+x_1B(x_2,\dots,x_n)+C(x_2,\dots,x_n)$, où B est une forme linéaire en $(x_2,\dots,x_n)$ et C une forme quadratique en $(x_2,\dots,x_n)$.

$$\phi(x_1,\dots,x_n)=a\left(x_1+\frac{B(x_2,\dots,x_n)}{2a}\right)^2+\left[C(x_2,\dots,x_n)-\frac{B(x_2,\dots,x_n)^2}{4a}\right]$$

On itère la méthode de Gauss en partant de $C-\frac{B^2}{4a}$.

<u>Cas 2:</u> $\forall i, a_{ii}=0$; $\phi(x_1,\dots,x_n)=ax_1x_2+x_1B(x_3,\dots,x_n)+x_2C(x_3,\dots,x_n)+D(x_3,\dots,x_n)$

où B et C sont des formes linéaires et D une forme quadratique

$$\phi(x_1,\dots,x_n)=a\left(x_1+\frac{C}{a}\right)\left(x_2+\frac{B}{a}\right)+\left(D-\frac{BC}{a}\right)$$
$$=\frac{a}{4}\left[\left(x_1+x_2+\frac{B+C}{a}\right)^2-\left(x_1-x_2+\frac{C-B}{a}\right)^2\right]+\left[D-\frac{BC}{a}\right]$$

On itère la méthode de Gauss en partant de $D-\frac{BC}{a}$.

<u>Exemples 23:</u> i) $\phi_1(x,y,z,t)=xy+yz+zt+tx=(x+z)(y+t)$
$$=\frac{1}{4}\left[(x+z+y+t)^2-(x+z-y-t)^2\right]$$

ii) $\phi_2(x,y,z)=x^2-2y^2+xz+yz=\left(x+\frac{z}{2}\right)^2-\frac{z^2}{4}-2y^2+yz$
$$=\left(x+\frac{z}{2}\right)^2-2\left(y-\frac{z}{4}\right)^2-\frac{z^2}{8}$$

B) Signature d'une forme quadratique réelle

<u>Loi d'inertie de Sylvester:</u> Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base ϕ-orthogonale de E. $\phi(x)=\sum_{i=1}^n x_i^2\phi(e_i)=\sum_{i=1}^n\lambda_i e_i^*(x)^2$, où $\lambda_i=\phi(e_i)\in\mathbb{R}$.
Pour fixer les idées: $\lambda_1,\dots,\lambda_p>0$, $\lambda_{p+1},\dots,\lambda_{p+q}<0$ et $\lambda_{p+q+1}=\dots=\lambda_n=0$.
On pose $\lambda_i=w_i^2$ pour $1\leq i\leq p$ et $\lambda_i=-w_i^2$ pour $p+1\leq i\leq p+q$ et $f_i=w_ie_i^*$. $\phi(x)=f_1(x)^2+\dots+f_p(x)^2-f_{p+1}(x)^2-\dots-f_{p+q}(x)^2$, et $f_1,\dots,f_{p+q}$ sont des formes linéairement indépendantes.

<u>Théorème 24:</u> (Sylvester) Quelle que soit la décomposition du type précédent $\phi(x)=g_1(x)^2+\dots+g_{p'}(x)^2-g_{p'+1}(x)^2-\dots-g_{p'+q'}(x)^2$ où $g_1,\dots,g_{p'+q'}$ sont des formes linéaires linéairement indépendantes on a $p'=p$ et $q'=q$. Le couple (p,q) s'appelle la signature de ϕ et le rang de ϕ est égal à $p+q$.

<u>Proposition 25:</u>
- ϕ est non dégénérée si et seulement si $p+q=n$.
- ϕ est positive si et seulement si sa signature est de la forme $(p,0)$.
- ϕ est non dégénérée et positive si et seulement si sa signature est $(n,0)$.

<u>Exemples 26:</u> (i) $\phi_1(x,y,z,t)=\frac{1}{4}\left[(x+z+y+t)^2-(x+z-y-t)^2\right]$. La signature de ϕ_1 est $(1,1)$ et son rang est 2. ϕ_1 est dégénérée.
(ii) $\phi_2(x,y,z)=\left(x+\frac{z}{2}\right)^2-2\left(y-\frac{z}{4}\right)^2-\frac{z^2}{8}$. La signature de ϕ_2 est $(1,2)$ et son rang est 3. ϕ_2 est non dégénérée.
(iii) $\varphi_1:(A,B)\mapsto tr({}^tAB)$, $\phi_1(A)=\sum_{i,j}a_{ij}^2$. signature: $(n^2,0)$ (produit scalaire)
(iv) $\varphi_2:(A,B)\mapsto tr(AB)$. $sgn(\phi_2)=(\dim\mathcal{S}_n,\dim\mathcal{A}_n)=\left(\frac{n(n+1)}{2},\frac{n(n-1)}{2}\right)$

C) Application à la géométrie différentielle

<u>Théorème 27:</u> Soit $f:U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et supposons qu'il existe $a\in U$ tel que $df_a=0$, de sorte que d'après la formule de Taylor-Young, $f(a+h)=f(a)+\frac{D^2f(a)(h,h)}{2}+o(\|h\|^2)$ où $D^2f(a)$ est la forme quadratique:
$$D^2f(a)(h,h)=\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)h_ih_j$$
Alors: (i) Si f admet un minimum (resp. un maximum) relatif en a, $D^2f(a)$ est une forme quadratique positive (resp. négative).
(ii) Si $D^2f(a)$ est une forme quadratique définie positive (resp. déf. nég.), f admet un min (resp. max) relatif en a.

DEV 1

Théorème 28 : (Lemme de Morse)
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ avec $0 \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que $Df(0) = 0$ et que $D^2 f(0)$ est non-dégénérée, de signature $(p, n-p)$. Alors il existe un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme φ entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$, tel que $\varphi(0) = 0$ et $f(x) - f(0) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2$, où $u = \varphi(x)$.

III - Coniques affines

Cadre : On se place dans un plan affine euclidien P. On se donne un repère orthonormé de P.

A) Coniques définies par foyer et directrice.

Définition 29 : Soit dans le plan P une droite D et un point F n'appartenant pas à D. Soit e un réel strictement positif. On appelle conique de foyer F, de directrice D et d'excentricité e l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M de P tels que $\frac{MF}{d(M,D)} = e$.

Proposition 30 : Dans le repère orthonormal d'origine F dont l'axe des ordonnées est parallèle à D, l'équation de $\mathcal{C}$ s'écrit
$x^2 + y^2 = (ex + p)^2$ où $p = ed$ est appelé paramètre de la conique.

Définition 31 : On appelle parabole une conique d'excentricité $e = 1$.

Proposition 32 : (Équation réduite de la parabole).
Les coordonnées (X, Y) de M dans le repère dont l'origine est le sommet de la parabole $(-\frac{p}{2}, 0)$ vérifient $Y^2 = 2pX$.

Proposition 33 : Soit H le projeté orthogonal de M sur D. La tangente en M à la parabole est orthogonale à (FH).

Définition 34 : On appelle ellipse une conique d'excentricité $e < 1$.

Proposition 35 : (Équation réduite de l'ellipse).
Dans le repère d'origine $O(\frac{ep}{1-e^2}, 0)$ l'équation s'écrit $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$
avec $a = \frac{p}{1-e^2}$ appelé demi-grand axe et $b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$ demi-petit axe.

Proposition 36 : (Définition bifocale de l'ellipse)
$\forall M \in \mathcal{C} \quad MF + MF' = 2a$

Définition 37 : On appelle hyperbole une conique d'excentricité $e > 1$.

Proposition 38 : (Équation réduite de l'hyperbole).
Dans le repère d'origine $O(-\frac{ep}{e^2-1}, 0)$ l'équation s'écrit
$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ où $a = \frac{p}{e^2-1}$ et $b = \frac{p}{\sqrt{e^2-1}}$.

Proposition 39 : (Définition bifocale de l'hyperbole).
$\forall M \in \mathcal{C} \quad |MF - MF'| = 2a$.

B) Coniques et formes quadratiques

Définition 40 : On appelle conique du plan P tout ensemble $\mathcal{C}$ de points $M(x, y) \in P$ vérifiant une équation de la forme $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, avec $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ et $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Remarque 41 : Posons $\Phi(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$.
Alors $\Phi(x,y) = q(x,y) + l(x,y) + f$ où q est la forme quadratique non nulle définie par $q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ et l est la forme linéaire $l(x,y) = dx + ey$.

Exemple 42 : L'équation $xy = 0$ décrit une conique constituée par deux droites sécantes, d'équations $x = 0$ et $y = 0$. L'équation $x^2 + y^2 - 1 = 0$ décrit une conique constituée du cercle de centre O et de rayon 1.

DEV 2

Théorème 43 : Par 5 points distincts A, B, C, D et E d'un plan affine P passe une conique. Elle est unique si et seulement si 4 points quelconques parmi ces 5 sont non alignés.

C) Réduction des coniques

Définition 44 : D'après le théorème 21, il existe une base $\{v_1, v_2\}$ orthogonale à la fois pour q et pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Les directions définies par v_1 et v_2 sont dites directions principales.

Remarque 45 : Si $v = X v_1 + Y v_2$, l'équation s'écrit $AX^2 + BY^2 + CX + DY + f = 0$ avec $A = q(v_1)$, $B = q(v_2)$, $C = l(v_1)$, $D = l(v_2)$.

Théorème 46 : On suppose que $\mathcal{C} \neq \emptyset$ et que $\mathcal{C}$ ne se réduit pas à un point. Alors : 1) Si $\mathrm{sgn}(q) = (2, 0)$ alors $\mathcal{C}$ est une ellipse
2) Si $\mathrm{sgn}(q) = (1, 1)$ alors $\mathcal{C}$ est une hyperbole qui éventuellement dégénère en deux droites non parallèles.
3) Si $\mathrm{sgn}(q) = (1, 0)$ alors $\mathcal{C}$ est une parabole qui dégénère en deux droites parallèles où la direction principale isotrope est contenue dans $\mathrm{Ker}(l)$

Exemple 47 : $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 2x - 2y = -\frac{1}{3} \iff 24\left(X - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + 12Y^2 = 1$ est l'équation d'une ellipse.