171 Formes quadratiques réelles, coniques, exemples et applications

## I/ Introduction aux formes quadratiques et aux coniques

### 1) Formes linéaires et bilinéaires

DÉF 1 : (Forme bilinéaire) Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel et une application $\varphi : E \times F \to \mathbb{K}$, $(x,y) \mapsto \varphi(x,y)$

On dit que $\varphi$ est bilinéaire si $\forall x \in E$, $\varphi(x,\cdot) : y \mapsto \varphi(x,y)$ et $\forall y \in F$, $\varphi(\cdot,y) : x \mapsto \varphi(x,y)$ sont linéaires, avec $\mathbb{K}$ un corps

Exemple 2 : Si $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$

L'application $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$, $(f,g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$ est une forme bilinéaire

Rmq 3 : Si $E$ est de dimension finie et fixons une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de $E$, alors pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$ dans $E$, la bilinéarité de $\varphi$ entraîne $\varphi(x,y) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} x_i y_j \varphi(e_i,e_j) = {}^tX M Y$

où $M = (\varphi(e_i,e_j))_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

DÉF 4 : Soit $\varphi$ une forme bilinéaire sur $E$, on dit que :
- $\varphi$ est symétrique si $\forall (x,y) \in E^2$, $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$
- $\varphi$ est antisymétrique si $\forall (x,y) \in E^2$, $\varphi(x,y) = -\varphi(y,x)$

Rmq 5 : - Si $\mathbb{K}$ est de caractéristique 2, la symétrie équivaut à l'antisymétrie
- Si $E$ est de dim finie et $\mathcal{B}$ est une base de $E$, une forme bilinéaire $\varphi$ sur $E$ est symétrique (resp. antisymétrique) ssi sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est symétrique (resp. antisymétrique)

Rappel 6 : On rappelle qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est symétrique si ${}^tA = A$, de la même manière $A$ est antisymétrique si ${}^tA = -A$

### 2) Formes quadratiques

DÉF 7 : On appelle forme quadratique sur $E$ toute application $q$ de la forme
$q : E \to \mathbb{K}$, $x \mapsto \varphi(x,x)$
où $\varphi$ est une forme bilinéaire symétrique sur $E$

Exemple 8 : a) $q_1 : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $A \mapsto \mathrm{tr}(A)^2$

b) $q_2 : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $A \mapsto \mathrm{tr}({}^tAA)$

c) $q_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto ax^2 + bxy + cy^2$ avec $a,b,c \in \mathbb{R}$

Prop 9 : Soit $q$ une forme quadratique sur $E$, $E$ étant un $\mathbb{K}$-ev, il existe une unique forme bilinéaire symétrique $\varphi$ telle que pour tout $x \in E$, $q(x) = \varphi(x,x)$, la forme bilinéaire $\varphi$ s'appelle la forme polaire de $q$ et on a
$\forall (x,y) \in E^2$, $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$
$= \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y))$

Exemple 10 : Si $\varphi(x,y) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j$ la forme quadratique associée à $\varphi$ est $q(x) = \sum_i a_{ii} x_i^2 + \sum_{i<j} (a_{ij} + a_{ji}) x_i x_j$

Réciproquement, si $q(x) = \sum_i a_{ii} x_i^2 + \sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j$

alors $q$ est une forme quadratique et sa forme polaire est $\varphi(x,y) = \sum_i a_{ii} x_i y_i + \frac{1}{2} \sum_{i<j} a_{ij}(x_i y_j + x_j y_i)$

DÉF 11 : Soit $q$ une forme quadratique sur $E$, où $E$ est de dim finie et $B$ une base de $E$.
On appelle matrice de $q$ dans la base $B$ et rang de $q$ le rang de cette matrice.
Le rang de $q$ est aussi le rang de sa forme polaire.

Exemple 12 : Dans $\mathbb{R}^3$, on définit la forme quadratique suivante, $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
$$(x,y,z) \mapsto 3x^2 + y^2 + 2xy - 3xz$$
la matrice de $q$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3) Coniques

DÉF 13 : Soient $q$ une forme quadratique non nulle et $\Psi$ une forme linéaire sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$. On appelle conique l'ensemble $C$ des $v \in \mathbb{R}^2$ vérifiant l'équation $q(v) + \Psi(v) = k$ où $k \in \mathbb{R}$, ie $C := (q + \Psi)^{-1}(\{k\})$

Rmq 14 : Si $\{e_1, e_2\}$ est la base canonique et $v = Xe_1 + Ye_2$, l'équation d'une conique est du type $\alpha X^2 + 2\beta XY + \gamma Y^2 + \lambda X + \mu Y = k$

II/ Formes quadratiques sur un espace euclidien

1) Diagonalisation dans une base orthonormée

Thm 15 : (Procédé d'orthonormalisation de Schmidt)
Soit une famille $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ libre de $E$, il existe une unique famille $(y_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ orthonormale telle que le sous espace vectoriel engendré par $(y_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ soit égale au sous espace vectoriel engendré par $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$

Prop 16 : Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $(x,y) \in E^2$, il y a équivalence entre
i) $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$
ii) $\|f(x)\| = \|x\|$
iii) Si $\{e_i\}_{i\in[\![1,n]\!]} = B$ est une base orthonormé et $A = Mat_B(f)$ alors ${}^tAA = I_n$

Rappel 17 : Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une famille finie de vecteur, on dit qu'elle est orthogonale pour $\langle\, , \rangle$ le produit scalaire sur $E^2$ si $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ si $i \neq j$, si de plus $\langle e_i, e_i \rangle = 1$ on dit qu'elle est orthonormale pour $\langle\, , \rangle$.

Thm 22 : $A \in S_n(\mathbb{R})$, où $S_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrice symétrique sur $\mathbb{R}$, ssi $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$ tq $D = {}^tPAP$ est diagonale

Thm 23 : Soit $(E, \langle\, , \rangle)$ un espace euclidien et $q$ une forme quadratique sur $E$. Il existe alors des bases qui sont orthogonales à la fois pour $\langle\, , \rangle$ et pour $q$

Corollaire 24 : Soient $q$ une forme et $e$ une base de $E$. On pose $S = Mat_e(f_q)$ où $f_q$ est la forme polaire associée à $q$ alors,
- on peut construire une base orthogonale de $q$ formée de vecteurs propres de $S$

- $\mathrm{sign}(q) = (r,s)$ où $r$ est le nombre de valeurs propre strictement positives et $s$ le nombre de valeurs propres strictement négatives

$\mathrm{sign}(q)$ est la signature de $q$

Corollaire 25 : Soit $q$ une forme quadratique sur un espace vectoriel réel $E$ de dim finie $n$, alors

$q$ est définie positive $\Leftrightarrow \mathrm{sign}(q) = (n,0)$

$q$ est définie négative $\Leftrightarrow \mathrm{sign}(q) = (0,n)$

$q$ est non dégénérée $\Leftrightarrow \mathrm{sign}(q) = (p, n-p)$

Rappel 26 : - $q$ est dite non dégénérée si sa forme polaire $\varphi$ est non dégénérée ie $\mathrm{rg}(\varphi) = n$

- $q$ est dite définie positive si $q(x) \geq 0$, $\forall x \in E$ et $q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

- $q$ est dite définie négative si $q(x) \leq 0$, $\forall x \in E$ et $q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

## III/ Classification des formes quadratiques

Thm 27 : (Algorithme de Gauss) On note $E^*$ le dual de $E$, il existe $n$ éléments $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in E^*$ linéairement indépendants et $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n$ tq $\forall x \in E$, $q(x) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \varphi_i(x)^2$, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, le nombre de $\beta_i > 0$ nous donne $r$, le nombre de $\beta_i < 0$ nous donne $s$, ainsi $\mathrm{sign}(q) = (r,s)$

Exemple 28 : a) $q(x,y,z) = xy + xz + yz$, alors

$q(x,y,z) = \frac{1}{4}(x+2z+y)^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2 - z^2$

b) $q(x,y,z,t) = xy + yz + zt + tx$, $q(x,y,z,t) = (x+z)(y+t)$

$= \frac{1}{4}\left((x+z+y+t)^2 - (x+z-y-t)^2\right)$

Thm 29 : (Sylvester) Soit $E$ un $\mathbb{R}$-ev de dim $n$, et $q$ une forme quadratique sur $E$. Il existe alors une base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ sur $E$ telle que si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, on a

$q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2$

où $r = \mathrm{rang}(q)$, ainsi $\mathrm{sign}(q) = (p, r-p)$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & 0 & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

(Dev 1)

Exemple 30 : Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
$(x,y,z) \mapsto x^2 + 2y^2 + 25z^2 - 4xy + 6xz - 8yz$

$q$ est de signature $(2,1)$

## IV/ Classification des coniques par la signature

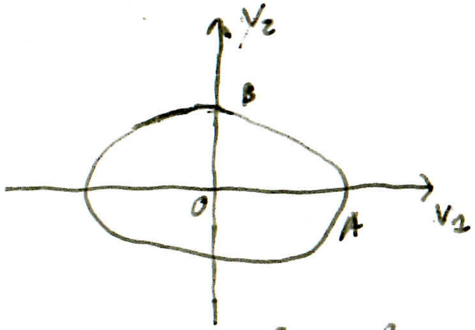
Lemme 31 : Une conique de la forme $\alpha X^2 + 2\beta XY + \gamma Y^2 + \lambda X + \mu Y = k$ peut s'écrire de la forme $aX'^2 + bY'^2 - 2rX' - 2sY' = k$ dans une base $\{v_1, v_2\}$ orthogonale pour $q$ et $\langle , \rangle$, avec $v = X'v_1 + Y'v_2$, ainsi $a = q(v_1)$, $b = q(v_2)$, $-2r = \varphi(v_1)$, $-2s = \varphi(v_2)$

Thm 32 : Soit $C$ une conique définie par l'équation $q(v) + \varphi(v) = k$, on suppose que $C \neq \emptyset$ et que $C$ n'est pas réduit à un point, alors :

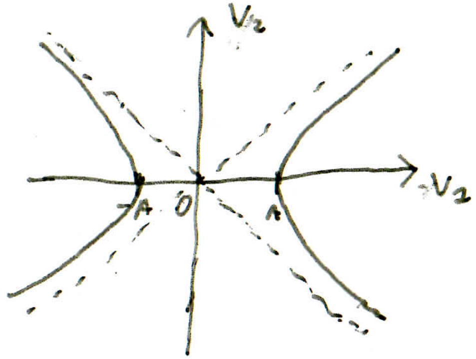
1) si $\mathrm{sign}(q) = (2,0)$, $C$ est une ellipse

2) si $\mathrm{sign}(q) = (1,1)$, alors $C$ est une hyperbole qui peut dégénérer en deux droites non parallèles

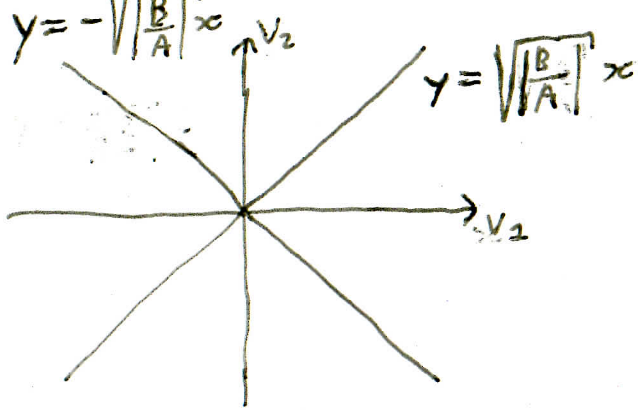
3) si $\mathrm{sign}(q) = (1,0)$, alors $C$ est une parabole, qui dégénère en une droite ou en deux droites parallèles, si la direction principale isotrope est contenue dans $\mathrm{Ker}(\varphi)$



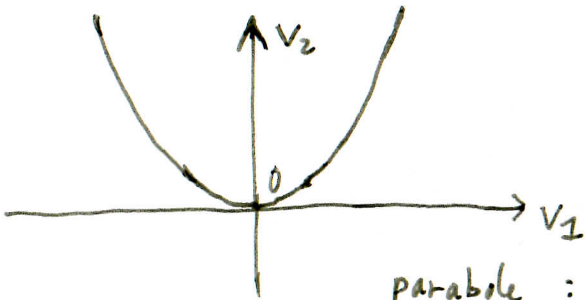

ellipse : $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2} = 1$




hyperbole : $\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1$




$\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 0$




parabole : $y = a x^2$