86 : Coniques

I] Coniques euclidiennes.

Cadre : $\mathcal{A}$ un plan affine euclidien.

Def 1 : on appelle conique ordinaire, l'ensemble des centres des cercles Γ passant par un point fixe F, et tangents soit à une droite D ne contenant pas F, soit à un cercle ne contenant pas F.

1) Les paraboles

Def 2. On appelle parabole $\mathcal{P}$ de foyer F et de directrice la droite D, l'ensemble des centres des cercles Γ passant par F, tangents à D ($F \notin D$)

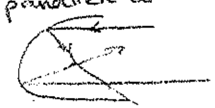
→ Construction point par point : soit $\Delta \perp D$, $\Delta \cap D = H$.
Alors $M \in \Delta$ appartient à $\mathcal{P} \iff M$ est sur la médiatrice de FH et sur Δ
(cf Figure 1).

• Equation cartésienne : soit le repère orthonormée $\mathcal{R} = (S, \vec{i}, \vec{j})$.
où $\vec{i} = \vec{SF}/\|\vec{SF}\|$. Alors $\begin{cases} F : (\frac{p}{2}, 0) \\ D : x = -\frac{p}{2} \end{cases}$ et $\mathcal{P} = \{ M(x,y) / y^2 = 2px \}$

Thm 3 [Lien avec la définition par foyer et directrice.] La parabole $\mathcal{P}$ de foyer F, de directrice D est l'ensemble des points M tq $\frac{MF}{d(M,D)} = 1$ ($F \notin D$)

• Propriété tangentielle : la tangente T au point $M \in \mathcal{P}$ est la médiatrice du segment $[F, h]$ où F est le foyer de la parabole et h la projection orthogonale de M sur la droite D. (cf Figure 2).

↳ Application "Tout rayon incident, intérieur, parallèle à l'axe se réfléchit vers le foyer."



- miroir parabolique
- utilisation pour les paraboles : forme parabolique avec un récepteur placé au foyer.

2) Les ellipses.

Def 4 : Soit C' un cercle de centre F' et F, distinct de F', intérieur à C'. On appelle ellipse E de foyer F et F' l'ensemble des centres des cercles Γ passant par F et tangents à C'.

Notation : $\|\vec{FF'}\| = 2c$ et rayon de $C' = 2a$. (donc $0 < c < a$).

→ Construction point par point : Soit φ sur C'. Alors M est l'intersection de $(F'\varphi)$ et de la médiatrice de $[F\varphi]$ (Figure 3)

Thm 5 : L'ellipse E, de foyers F et F', de cercle directeur C' de rayon $2a$ et de centre F' est $\{ M / MF + MF' = 2a \}$.

• Equation cartésienne : soit le repère $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$ où O est le milieu de $[FF']$ et $\vec{i} = \vec{FF'}/\|\vec{FF'}\|$
Alors $F : (c, 0)$ et $E = \{ M(x,y) / \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \}$ où $b > 0$ et $b^2 = a^2 - c^2$.

Csq : une ellipse a un centre de symétrie.

Thm 6 : [Lien avec la définition de l'excentricité]. Soit Δ une droite $F \notin \Delta$. Une ellipse est l'ensemble des points M tq $\frac{MF}{d(M,\Delta)} = e < 1$.
e est appelée excentricité de l'ellipse.
En notant $\Delta : x = d$ on a $\dfrac{\left(x + \frac{d e^2}{1-e^2}\right)^2}{\frac{e^2 d^2}{(1-e^2)^2}} + \dfrac{y^2}{\frac{e^2 d^2}{1-e^2}} = 1$

• Propriété tangentielle :

Thm 7 : La tangente en un point M de E est la bissectrice extérieure de $((MF), (MF'))$ (Figure 4)

Thm 8 : [1er thm de Poncelet] Soit P le point d'intersection de deux tangentes en M et M'. Alors (FP) est bissectrice de $((FM), (FM'))$. (Figure 5)

→ Application : "un rayon incident, intérieur, passant par un foyer se réfléchit vers l'autre foyer."
Figure 6.

DVPT

Thm 9 : Soit $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$, $M_3(z_3)$ trois points alignés dans le plan $\mathbb{C}$.
Soit $P(X) = (X-z_1)(X-z_2)(X-z_3)$
Alors les racines du polynôme P' sont les foyers d'une ellipse tangente aux 3 côtés du triangle $M_1M_2M_3$ en leur milieux.

DVPT

- représentation paramétrique $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

→ application : Calcul du Hausdorffien en dim 2.

③ Les hyperboles.

def 10 : Soit C' un cercle de centre F' et F extérieur à C'. On appelle hyperbole H de foyer F et F', l'ensemble des centres M des cercles Γ tangents à C' et passant par F.

Thm 11 : Une hyperbole H de foyer F et F' est l'ensemble des points M du plan tq $|MF - MF'| = 2a$.

- Equation cartesienne : on reprend le repere $\tilde{\mathcal{R}}$ équation : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

⇒ Csq : une hyperbole a un centre de symétrie.

Thm 12 [lien avec la définition de l'excentricité]. Soit Δ une droite, $F \notin \Delta$
$e > 1$. Alors une hyperbole est $\{M \,/\, \frac{FM}{d(M,\Delta)} = e\}$

→ Grace à l'excentricité, on a pu classer les coniques !

④ En polaires.

Thm 13 : On a les équations i) $r = \frac{ed}{1+e\cos\theta}$ pour l'ellipse et la parabole où la directrice est d'équation $x = d$.
ii) $r = \frac{ed}{1+e\cos\theta}$ pour l'hyperbole de foyer l'origine de directrice Δ $x = d$. et où les 2 branches de l'hyperboles correspondent aux valeurs < 0 ou > 0 de r.

→ Application : - pb à 2 corps en physique : trajectoire = coniques.
- Lois de Kepler.

II] Coniques Affines

Cadre : $P_{\mathbb{R}}$ plan affine réel

① Définitions

* On appelle conique affine $\mathcal{C}$ la classe d'équivalence d'un polynôme de degré (exactement) 2 via la relation.
$(f \sim g) \Leftrightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{R}^* \,/\, f = \lambda g)$.

ie l'équation cartesienne : $\underbrace{ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f}_{f(x,y)} = 0$
avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$.

qui peut également s'écrire
$\xi(x,y) + \lambda(x,y) + \alpha = 0$ où $\begin{cases} \xi : \text{forme quadratique} \\ \lambda = \text{forme linéaire} \\ \alpha : \text{scalaire} \end{cases}$

* On appelle matrice de la conique affine $\mathcal{C}$, notée M, la matrice associée à la forme quadratique homogénéisée q de $\mathcal{C}$: $\begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}$

* $\mathcal{C}$ est dite propre si M inversible (ie q non dégénérée)

* L'image de la conique est $\{M \in P_{\mathbb{R}} \,/\, f(x,y) = 0\}$.

Rmq : Cette vision n'est pas appropriée pour la classification des coniques : $x^2+y^2+1=0$ et $x^2+1=0$ définissent toutes les 2 l'ensemble vide, mais leurs formes quadratiques ne sont pas équivalentes.

② Classification affine

Thm 14 : [équations réduites des coniques affines] Dans un repère adéquat l'équation d'une conique du plan affine réel est de l'une des neufs formes classées dans le tableau suivant, où elles sont regroupées par type (en fonction du signe du determinant de la matrice 2x2 associée à ξ).

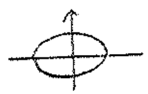
Rmq : On pourrait donner une classification topologique.

Equation algébrique réduite	Image géométrique de la conique.	Rang(M)	Signature de S et dét	Type.
$x^2+y^2+1=0$	$\emptyset$	3	(2, 0)	Elliptique
$x^2+y^2-1=0$	Cercle	3	$ac-b^2>0$	
$x^2+y^2=0$	Point	2		
$x^2-y^2-1=0$	Hyperbole	3	(1, 1)	Hyperbolique
$x^2-y^2=0$	Droites sécantes	2	$ac-b^2<0$	
$x^2-y=0$	Parabole	3		Parabolique
$x^2-1=0$	Droites parallèles	2	(1, 0)	
$x^2+1=0$	$\emptyset$	2	$ac-b^2=0$ (dégénérée)	
$x^2=0$	Droite double	1		

3° Application de la définition par (S, λ, κ) : coniques à centre

Def 15 : Lorsqu'il existe un seul et unique point tel que la conique est invariante par symétrie centrale par rapport à ce point, on appelle ce dernier le centre de la conique.

→ les 2 coniques non dégénérées à centre : l'ellipse et l'hyperbole



Prop 16 Pour trouver le centre Ω, il suffit de résoudre le système

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases} \quad \text{où } \Omega(x_0, y_0).$$

Ex : $x^2+2xy-y^2-4x=0$

Alors $\begin{cases} 2x_0+2y_0=4 \\ -2y_0+2x_0=0 \end{cases}$ qui équivaut à $\Omega(1,1)$

4° diamètre d'une conique. 22 - 23 [B. 2]

def 17 On appelle diamètre d'une conique à centre, toute droite passant par le centre et qui rencontre celle-ci en 2 points distincts.

Thm 18 : Soit une direction de droite δ. Les milieux des cordes de direction δ d'une conique à centre sont alignés sur un diamètre de cette conique.

def 19 : Soit δ une direction. Le diamètre de direction δ et le diamètre qui contient les milieux des cordes de direction δ sont appelés des diamètres conjugués

III Action de groupe et coniques.

Prop 20 une ellipse est l'image d'un cercle par une affinité.

Thm 21. Soit 2 coniques propres $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ de foyers réels respectifs F et F' de directrices associées respectives Δ et Δ' et d'excentricités respectives e et e'. Pour qu'il existe une similitude qui transforme $\mathcal{E}$ en $\mathcal{E}'$, il faut et il suffit que les 2 coniques aient la même excentricité 96 [B :

Lemme 22. L'image par une similitude s d'un foyer d'une conique est un foyer de la conique image.

Thm 23. Pour qu'il existe une isométrie transformant une hyperbole H de foyer {F, F'} en une hyperbole H, de foyers {F₁, F₁'} il faut et il suffit que les 2 hyperboles aient même longueur d'axe et même distance focale. 11

Figure 1

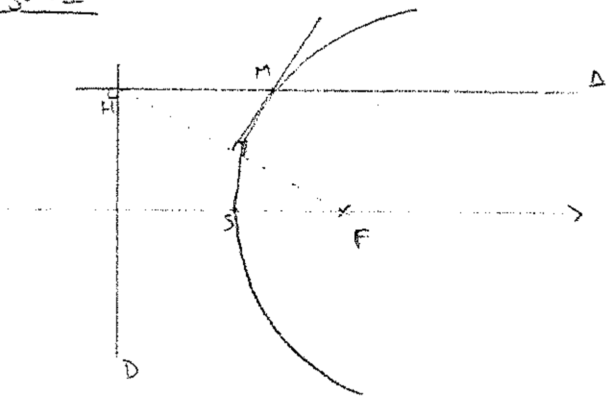


Figure 2

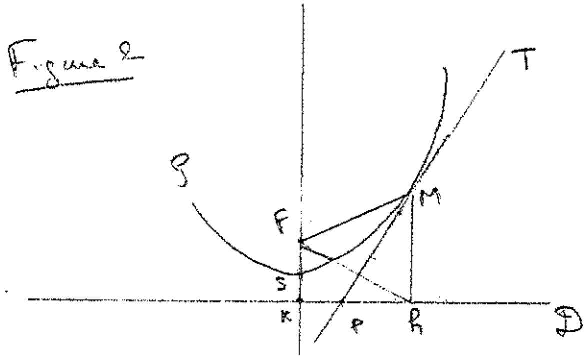
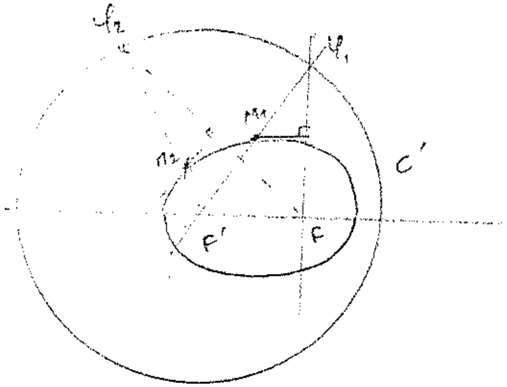


Figure 3



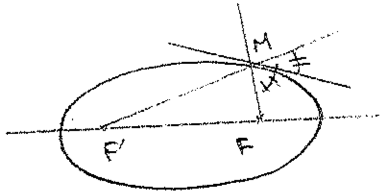


Figure 4

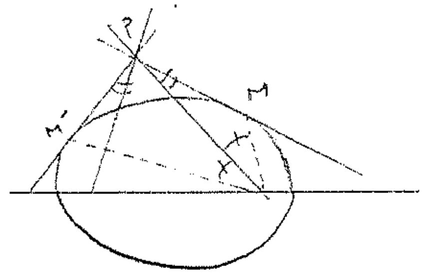


Figure 5

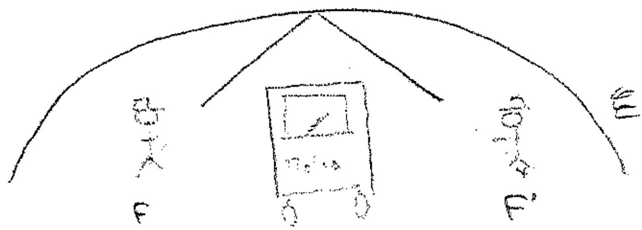


Figure 6

Références

I] [Gostiaux] Cours de mathématiques spéciales, T5.
pour les applications [Ladegaillerie] Géométrie

II] [B.I] : Bruno Ingrao
III] "Coniques Projectives, affines et métriques"

+ [Audin], [Cours de M. Coste].