180

Coniques. Applications.

Cadre : on se place dans le plan affine euclidien.

I Coniques affines

1) Définitions

Définition 1.1 : dans un espace affine E, on appelle quadrique affine la classe d'équivalence d'un polynôme du second degré $f : E \to \mathbb{R}$ sous la relation $f \sim g$ ssi $\exists \lambda \in \mathbb{R}^*$, $g = \lambda f$. Une quadrique plane est appelée une conique. L'ensemble des points de E vérifiant $f(M) = 0$ est l'image de la conique.

Remarque 1.2 : une conique f peut s'écrire $f(M) = q(\overrightarrow{OM}) + L_0(\overrightarrow{OM}) + c_0$ où q forme quadratique, L_0 forme linéaire et $c_0 \in \mathbb{R}$. q ne dépend pas du point O choisi.

Définition 1.3 : avec la notation précédente, on dit que Ω est un centre pour la conique f si $L_\Omega = 0$. Si ce centre est unique, on dit que f est une conique à centre.

Définition 1.4 : la conique f de E définie par le polynôme $f(M) = q(\overrightarrow{OM}) + L(\overrightarrow{OM}) + c$ est dite propre si la forme quadratique définie sur $E \times \mathbb{R}$ par :
$$Q(u, z) = q(u) + L(u)z + cz^2$$
est non dégénérée. Cette forme quadratique est l'homogénéisée de f.

Exemple 1.5 :
- pour $f = xy$, $Q(x,y,z) = xy$ est dégénérée ;
- pour $f = x^2 - y$, $Q(x,y,z) = x^2 - yz$ est non dégénérée et f est propre.

2) Classification euclidienne des coniques

Théorème 1.6 : classification euclidienne des coniques affines :

DVPT 1

1. Une conique propre à centre et d'image non vide s'écrit dans un repère orthonormé d'origine le centre :
   - soit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $0 < b \leq a$ si c'est une ellipse ;
   - soit $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^{+*2}$ si c'est une hyperbole.
2. Une équation d'une conique propre d'image non vide et qui n'a pas de centre s'écrit dans un repère orthonormé $y^2 = 2px$ pour un $p > 0$.

Exemple 1.7 : dans un repère orthonormé d'origine $(0,5)$, la conique d'équation $y^2 - 5y - 4x = -5$ s'écrit $Y^2 = 4X$: parabole.

3) Classification affine

Proposition 1.8 : soit $\mathcal{C}$ une conique propre d'image non vide d'un plan affine. Il existe un repère dans lequel une équation de $\mathcal{C}$ a une et une seule des formes :
- $x^2 + y^2 = 1$ (ellipse)
- $x^2 - y^2 = 1$ (hyperbole)
- $y^2 = x$ (parabole)

Application 1.9 : l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ a pour aire $\pi a b$.

Application 1.10 : retrouver géométriquement le centre d'une ellipse (figure 1).

II Etude métrique des coniques euclidiennes

1) Ellipses

Proposition 2.1 : l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ a pour origine le centre, a est son grand axe et b son petit axe (pour $b \leq a$).

Définition 2.2 : avec les notations précédentes et $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, on définit pour l'ellipse :
- ses sommets $A'(-a,0)$, $A(a,0)$, $B(0,b)$ et $B'(0,-b)$;
- ses foyers $F(-c,0)$ et $F'(c,0)$;
- ses directrices $\mathcal{D} : x = -a^2/c$ et $\mathcal{D}' : x = a^2/c$;
- son excentricité $e = c/a$ (figure 2).

Proposition 2.3 : une conique $\mathcal{E}$ est une ellipse $\Rightarrow 0 < e < 1$

Théorème 2.4 : soit $\mathcal{E}$ une ellipse de foyers F_1, F_2 ; et soit $M \in \mathcal{E}$. Alors la tangente à $\mathcal{E}$ au point M est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{F_1 M F_2}$.

Application 2.5 : en optique, tout rayon incident intérieur passant par un foyer se réfléchit vers l'autre (figure 2).

Application 2.6 : ellipse de Steiner : soient A, B, C 3 points non alignés d'affixes a, b, c dans $\mathbb{C}$. On pose le polynôme $P = (X-a)(X-b)(X-c)$ et w_1, w_2 les racines de P'. Alors toute ellipse de foyers F_1 et F_2 d'affixes w_1 et w_2 tangente en un côté de ABC est tangente à tous les côtés en leurs milieux. DVPT 2

Proposition 2.7 : l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ admet la représentation paramétrique $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Proposition 2.8 : la tangente en un point $M_0(x_0, y_0)$ de l'ellipse d'équation cartésienne $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ a pour équation $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$.

Théorème 2.9 : définition bifocale : l'ellipse de foyers F_1 et F_2 est l'ensemble des $M \in \mathcal{P}$ tels que $MF_1 + MF_2 = 2a$ pour un $a > 0$ tel que $2a > F_1F_2$.

Application 2.10 : tracer une ellipse avec une ficelle dont les extrémités sont fixées aux 2 foyers.

2) Hyperboles

Proposition 2.11 : l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ a pour origine O et pour asymptotes $y = \pm \frac{b}{a} x$.

Définition 2.12 : avec les notations précédentes et $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, on définit pour l'hyperbole :
- ses sommets $A'(-a,0)$ et $A(a,0)$;
- ses foyers $F'(-c,0)$ et $F(c,0)$;
- ses directrices $\mathcal{D} : x = -a^2/c$ et $\mathcal{D}' : x = a^2/c$;
- son excentricité $e = c/a$ (figure 4)

Exemple 2.13 : pour $\mathcal{H} : \frac{(x-1)^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$, le centre est $(1,0)$, $a = \sqrt{5}$, $b = 2$, $c = 3$, $\mathcal{D}, \mathcal{D}' : x = \pm 5/3$, $e = 3/\sqrt{5}$.

Proposition 2.14 : une conique $\mathcal{H}$ est une hyperbole $\Rightarrow e > 1$.

__Proposition 2.15 :__ l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ admet la représentation paramétrique $\begin{cases} x = a \operatorname{ch} t \\ y = b \operatorname{sh} t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

__Proposition 2.16 :__ la tangente en un point $M_0(x_0, y_0)$ de l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ a pour équation $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$.

3) Paraboles

__Définition 2.17 :__ on définit, pour la parabole d'équation $y^2 = 2px$

- son sommet $O(0,0)$;
- son foyer $F(p/2, 0)$;
- sa directrice $\mathcal{D} : x = -p/2$.

__Application 2.18 :__ tout rayon incident intérieur parallèle à l'axe se réfléchit vers le foyer (figure 5)

__Proposition 2.19 :__ la parabole d'équation $y^2 = 2px$ admet la représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2pt^2 \\ y = 2pt \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

__Proposition 2.20 :__ la tangente en un point $M_0(x_0, y_0)$ de la parabole d'équation $y^2 = 2px$ a pour équation $yy_0 = p(x + x_0)$.

4) Coordonnées polaires

__Proposition 2.21 :__ toute conique admet dans un repère orthonormé d'origine au foyer une équation du type $\rho = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \alpha)}$ avec e son excentricité qui vaut :

- 1 ssi c'est une parabole ; • $r \in]0,1[$ ssi c'est une ellipse ;
- $r \in]1, \infty[$ ssi c'est une hyperbole.

__Application 2.22 :__ lois de Kepler

III Applications à la géométrie

1) Théorème de Bezout

__Théorème 3.1 :__ Bezout : 2 coniques du plan n'ayant aucune composante commune s'intersectent en exactement 4 points, comptés avec multiplicité.

__Application 3.2 :__ soient A, B, C, D, E 5 points non alignés 3 à 3 dans $\mathcal{P}$. Alors il existe une unique conique passant par ces 5 points.

2) Théorème de Pascal

__Théorème 3.3 :__ Pascal : soient A, B, C, D, E, F 6 points situés sur une conique $\mathcal{C}$ de $\mathcal{P}$. Alors les points (figure 6) $(AB) \cap (DE)$, $(BC) \cap (EF)$ et $(CD) \cap (FA)$ sont alignés.

__Corollaire 3.4 :__ Théorème de Pappus : soient D et D' 2 droites, et soient $(p_1, p_2, p_3) \in D$, $(q_1, q_2, q_3) \in D'$. Alors les points $(p_1 q_2) \cap (p_2 q_1)$, $(p_1 q_3) \cap (q_1 p_3)$ et $(p_2 q_3) \cap (q_2 p_3)$ sont alignés.

Références :

- Audin, Géométrie
- Monier, Géométrie MPSI
- Laville, Géométrie pour le CAPES et l'agrégation
- Morris Marden, Geometry of polynomials (DVPT 2)

figure 1

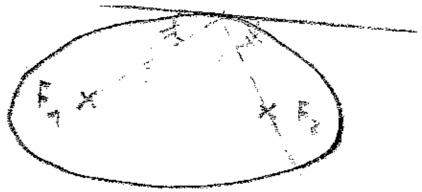

figure 3

figure 5

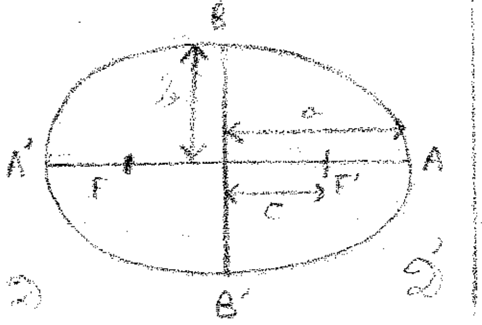

figure 2

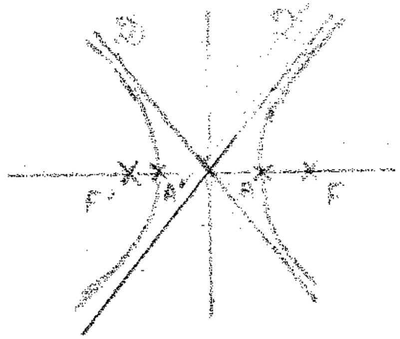

figure 4

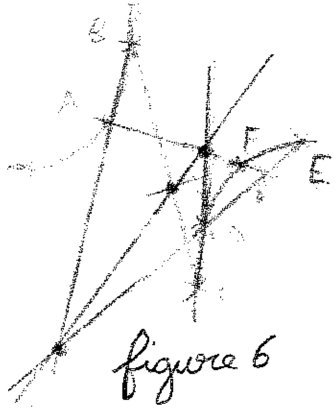

figure 6