# I Conique affine

**Cadre** : On se place dans un espace affine $\mathcal{E}$, où $\mathcal{E}$ est un plan. $K$ est un corps ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

**Définition** : On appelle conique affine la classe d'équivalence d'un polynôme du second degré $f : \mathcal{E} \to K$ sous la relation $f \sim g \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, g = \lambda f$

**Définition** : On appelle l'ensemble des points $M$ de $\mathcal{E}$ tel que $f(M) = 0$ l'image de la conique.

**Exemples** : • $f_1 = x^2 + y^2 - 1$ décrit le cercle unité dans $\mathbb{R}^2$
• $f_2 = x^2 - y$ décrit une parabole dans $\mathbb{R}^2$

**Remarque** : On peut définir la conique par :
$f(M) = q(\overrightarrow{OM}) + L_0(\overrightarrow{OM}) + c_0$ $\forall M \in \mathcal{E}$ avec un point $O \in \mathcal{E}$ fixé où : - $q$ est une forme quadratique
- $L$ est une forme linéaire
- $c$ est une constante.

**Définition** : On appelle forme quadratique homogénéisée une forme quadratique suivante :
$Q(u, z) = q(u) + L(u)z + cz^2$ $\forall u \in \vec{E}, \forall z \in \mathbb{R}$
où $\vec{E}$ est l'espace des vecteurs associés à $\mathcal{E}$.

**Définition** : Si $Q$ est non-dégénéré, on dit que la conique est propre.

**Exemples** : Soit $Q_i$ la forme quadratique homogénéisée de $f_i$
$Q_1((x,y), z) = x^2 + y^2 - z^2$ est non dégénérée donc $f_1$ est propre.
Soit $f_3 = x^2$ (droite double $\{x = 0\}$)
$Q_3((x,y), z) = x^2$ est dégénérée
donc $f_3$ n'est pas propre

**Définition** : On dit que $\Omega$ est un centre pour la conique si $L_\Omega = 0$

**Définition** : Une conique qui admet un centre unique est appelée conique à centre

**Proposition** : Une conique $f$ est à centre si et seulement si $q$ est non-dégénérée.

**Exemples** : • $f_1 = x^2 + y^2 - 1$ est à centre
• $f_2 = x^2 - y$ n'est pas à centre (on remarque que : conique à centre $\not\Leftrightarrow$ conique propre)
• $f_3 = x^2$ a une infinité de centre et n'est pas à centre (l'existence d'un centre ne garantit pas l'unicité de ce centre)

# II Classification des coniques affines

## 1) Le cas euclidien

**Cadre** : On suppose que $\mathcal{E}$ est euclidien, et on se limite donc à $K = \mathbb{R}$

**Proposition** : Une conique à centre s'écrit $\alpha x^2 + \beta y^2 + c$ ($\alpha, \beta$ non nul) dans un repère orthonormé d'origine le centre et orthogonal pour $q$.

**Proposition** : Une conique propre à centre (d'image non vide) s'écrit, dans un repère orthonormé d'origine le centre :
* soit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$ (on dit que la conique est une ellipse)
* soit $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1$ (on dit que la conique est une hyperbole)

avec $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $0 < b \leq a$ dans le cas d'une ellipse.

Exemple : Un cercle est une ellipse.

Proposition : Si $c=0$, la cônique n'est pas propre et la cônique s'écrit :

- soit $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ (l'image est un point)
- soit $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ (l'image est formée de deux droites sécantes)

Exemple : $q_4 = xy = \frac{1}{4}(x+y)^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2$ est formée des droites $\{y=0\}$ et $\{x=0\}$

Proposition : Si la cônique n'est pas à centre alors elle s'écrit $ay^2+\alpha x+c$

- Si $\alpha=0$ on a 3 cas :
  - $-\frac{c}{a}>0$ l'image de la cônique est formée de deux droites parallèles
  - $c=0$ l'image est formée d'une droite double
  - $-c/a<0$ l'image est vide
- Si $\alpha\neq 0$ la cônique peut s'écrire $y^2-bx$ avec $b>0$ on dit que la conique est une parabole

Remarque 1 : La classification des côniques est étroitement liée à celle des formes quadratiques. Le rang de la forme quadratique dit si la cônique est à centre ou non, alors que la signature indique si on a une hyperbole ou une ellipse (les cas du point et des droites sécantes étant des cas limites).

On peut donc considérer que le cas où la cônique n'est pas à centre est un cas dégénéré.

## 2) Le cas affine

Terminologie : Les équations $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ et $y^2=2px$ sont dites réduites. Les nombres positifs $2a$, $2b$, $p$ sont respectivement les axes et le paramètre. Toute cônique propre d'image non-vide est dans une et une seule des familles ellipse, hyperbole ou parabole qu'on appelle son type.

Proposition : Soit $C$ une cônique propre d'image non vide d'un plan affine. Il existe un repère dans lequel une équation de $C$ a une de ces formes :

- $x^2+y^2=1$ (ellipse)
- $x^2-y^2=1$ (hyperbole)
- $y^2=x$ (parabole)

Remarque 1 : On définit en fait des classes sous l'action des transformations affines. En effet soit deux coniques $C$ et $C'$ propres d'image non vide, pour qu'il existe une transformation affine envoyant $C$ sur $C'$, il faut et il suffit que $C$ et $C'$ aient le même type.

Remarque 2 : • Le type de la conique décrit son type topologique. En d'autres termes, on peut remplacer "transformation affine" par "homéomorphisme" dans la remarque précédente : les ellipses sont les côniques compactes, les hyperboles sont les côniques ni connexes ni compactes, et les paraboles sont les côniques connexes mais pas compactes.

• Pour les côniques réelles propres, donner l'image est équivalent à donner une équation.

## III Propriétés géométriques des coniques

### 1) Intersections

<u>Proposition</u> : Une conique $q(\overrightarrow{AM}) + L_A(\overrightarrow{AM}) + c_A$ rencontre une droite passant par A et de vecteur directeur $u$ selon plusieurs cas :
- la droite est entièrement contenue si $q(u) = L_A(u) = c_A = 0$
- la droite s'intersecte en un point simple si $q(u) = 0$ et $L_A(u) \neq 0$
- la droite s'intersecte en un point double si $\lambda^2 q(u) + \lambda L_A(u) + c_A = 0$ a une racine double.
- la droite s'intersecte en deux points si le polynôme $\lambda^2 q(u) + \lambda L_A(u) + c_A = 0$ a deux racines distinctes.
- l'intersection est vide si l'équation n'a pas de solutions.

<u>Exemple</u> : Soit $\mathcal{C}_4 = x^2 - y^2 - 1$ une hyperbole
- la droite $\{x=1\}$ coupe l'hyperbole en $(1,0)$ point double
- la droite $\{x=0\}$ ne rencontre pas l'hyperbole.
- la droite $\{y=0\}$ coupe l'hyperbole en deux points simples $(-1,0)$ et $(1,0)$

<u>Proposition</u> : Une droite rencontre une conique $C$ en un unique point double A ssi elle est tangente à $C$ en A.

SH] DEV

<u>Théorème de Bezout</u> : Soit $C$ une conique propre et $\mathcal{F}$ une cubique (c'est à dire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^2$ d'un polynôme de degré 3) telles que $C$ ne soit pas contenu dans $\mathcal{F}$. Alors $C \cap \mathcal{F}$ contient au plus 6 points.

### 2) Construction géométrique des coniques

<u>Proposition</u> : Pour toute conique propre d'image non-vide qui n'est pas un cercle, il existe un point F appelé foyer, une droite $D$ ne contenant pas F, appelé directrice et un nombre réel positif $e$ appelé excentricité tels que la conique soit l'ensemble des points M du plan tels que $FM = e\, d(M, D)$

<u>Exemple</u> : La parabole $\mathcal{C}_2 = x^2 - y$ a un foyer unique en $(0,1)$ et une directrice $\{y=-1\}$

<u>Proposition</u> : Les coniques propres à centre qui ne sont pas des cercles ont deux foyers.

Exemple : L'hyperbole $\mathcal{C}_4 = x^2 - y^2 - 1$ a deux foyers $(\sqrt{2}, 0)$ et $(-\sqrt{2}, 0)$ sont ses foyers. Ils sont symétriques par rapport à $\{x=0\}$

<u>Proposition</u> : Un ensemble vérifiant la propriété précédente est une conique propre :
- une ellipse si $e < 1$
- une parabole si $e = 1$
- une hyperbole si $e > 1$

<u>Propriété</u> :
- Une ellipse de foyer F et F' est l'ensemble des points M tels que $MF + MF' = 2a$ pour un certain $a$ positif tel que $2a > FF'$
- Une hyperbole de foyer F et F' est l'ensemble des points M tels que $|MF - MF'| = 2a$ pour un certain réel $a$ positif tel que $2a < FF'$

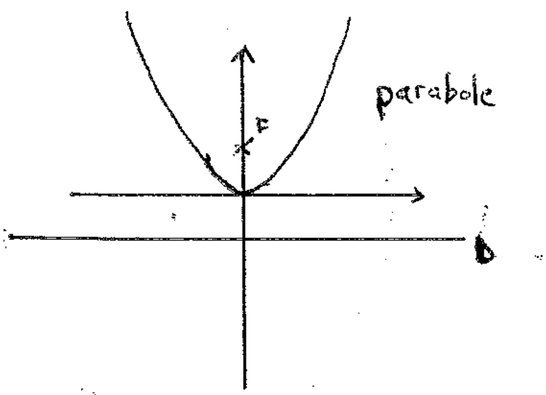
DEV [MER]

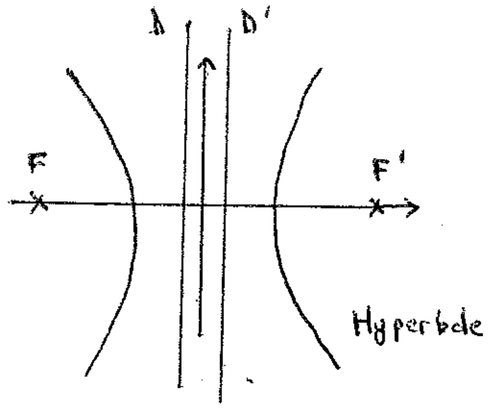
<u>Théorème</u> : Soit $f \in \mathbb{C}[X]$ polynôme unitaire de degré 3 $f = (X - z_1)(X - z_2)(X - z_3)$ tel que les points $M_i$ d'affixe $z_i$ ne sont pas alignés dans le plan $\mathcal{P}$. Alors les racines de $f'$ sont les affixes des foyers d'une ellipse tangente avec les 3 côtés du triangle $M_1M_2M_3$ en leur milieu.

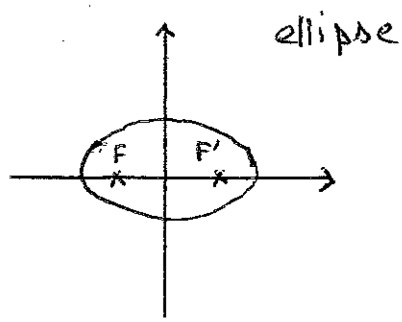
Référence : - Audin, Géométrie p261. [AUD]

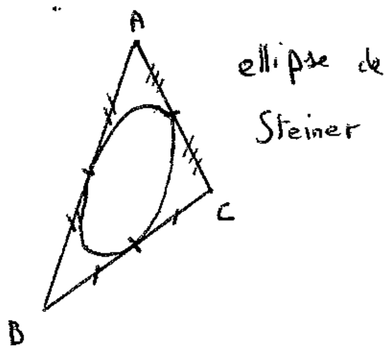
- Mercier-Rombaldi, CAPES-externe 2009 [MER]
- Shefarevich, Basic algebraic geometry [SH]

Annexe



# Théorème de Bézout

Référence : Shafarevich, Basic algebraic geometry p20-21
Leçons : 180, 144 (éventuellement)

On énonce une version faible du théorème de Bézout :

**Thm 1** : Soit $\mathcal{C}$ une conique propre et $\mathcal{F}$ une cubique (c'est-à-dire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^2$ d'un polynôme de degré 3) telles que $\mathcal{C}$ ne soit pas contenu dans $\mathcal{F}$. Alors $\mathcal{C} \cap \mathcal{F}$ contient au plus 6 points.

Démo 1 : Comme $\mathcal{C}$ est propre, il existe un repère dans lequel son équation est :
$$y^2 = g(x) \qquad \text{où } g \text{ est un polynôme de degré } 2$$

Dans ce repère, on écrit l'équation de $\mathcal{F}$ : $f(x,y) = 0$
où $f$ est un polynôme en $x$ et $y$ de degré 3.
D'où :
$$(x,y) \in \mathcal{C} \cap \mathcal{F} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = g(x) \\ f(x,y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = g(x) \\ \underset{y.g(x)}{y^3} + \overset{g(x)}{y^2}\underbrace{[\cdots]}_{\substack{\text{polynôme en } x \\ \text{de degré} \leq 1}} + y\underbrace{[\cdots]}_{\text{de degré} \leq 2} + \underbrace{[\cdots]}_{\text{de degré} \leq 3} = 0 \end{cases}$$

$$\underset{(*)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y^2 = g(x) \\ y \times q(x) + r(x) = 0 \end{cases}$$

où $q$ est polynôme de degré $\leq 2$ et $r$ est polynôme de degré $\leq 3$.
Comme on cherche à montrer que $\#(\mathcal{C} \cap \mathcal{F})$ est au plus 6, il suffit de voir que $(*)$ admet au plus 6 solutions. Soit $(x,y)$ solution.
On a deux cas :
- $x$ est racine de $q$ (et donc de $r$, par $(*)$)
- $x$ n'est pas racine de $q$

On va donc réexprimer $(*)$ avec les racines de $q$ et $r$ :

Soit $x_1, \dots, x_k$ racines communes à $q$ et $r$ (répétées avec multiplicités)

Donc $q(x) = \left[\prod_{i=1}^{k} (x - x_i)\right] \cdot \tilde{q}(x)$ et $r(x) = \left[\prod_{i=1}^{k} (x - x_i)\right] \cdot \tilde{r}(x)$

avec $k \leq \deg q \leq 2$ , $\deg \tilde{q} \leq 2-k$ , $\deg \tilde{r} \leq 3-k$

On a : $\forall\, 1 \leq i \leq k$ $\quad y \cdot \overbrace{q(x_i)}^{0} + \overbrace{r(x_i)}^{0} = 0$ (par construction)

Or, à $i$ fixé, l'équation $y^2 = g(x_i)$ admet au plus deux solutions (en $y$).

Donc :

- si $\begin{cases} (x,y) \text{ est solution de } (*) \\ \text{et} \quad x \text{ est racine de } q \end{cases}$

  alors $x \in \{x_i,\ 1 \leq i \leq k\}$ et pour chaque $x_i$, il n'y a que 2 $y$ possibles

  $\Rightarrow$ il y a au plus $2 \times k$ solutions dont l'abscisse est racine de $q$

- si $\begin{cases} (x,y) \text{ est solution de } (*) \\ \text{et} \quad x \text{ non racine de } q \end{cases}$

alors $x \notin \{x_1, \dots, x_k\}$ et $(x,y)$ est solution de

$$(**) \begin{cases} y^2 = g(x) \\ \tilde{q}(x) \neq 0 & (x \text{ non racine}) \\ y\,\tilde{q}(x) + \tilde{r}(x) = 0 & \left(\text{on simplifie par } \prod_{i=1}^{k}(x - x_i)\right) \end{cases}$$

Dans ce cas, on a aussi : $y\,\tilde{q}(x) = -\tilde{r}(x)$

$$\Rightarrow y^2 \tilde{q}^2(x) = \tilde{r}^2(x) \qquad y^2 = g(x)$$

$$\Rightarrow g(x) \cdot \tilde{q}^2(x) = \tilde{r}^2(x)$$

qui est une équation de degré $d$ avec

$$d \leq \max\{\deg(g) + 2\deg(\tilde{q})\ ;\ 2\deg(\tilde{r})\}$$
$$\leq \max\{2 + 2(2-k)\ ;\ 2(3-k)\}$$
$$\leq 6 - 2k$$

Si $g \cdot \tilde{q}^2 - \tilde{r}^2$ est non identiquement nul, alors l'équation $(**)$ admet au plus $6-2k$ solutions. Au final, si on "somme" les deux cas, $(*)$ admet au plus $6 - 2k + 2k = \underline{6 \text{ solutions}}$.

Reste à voir que $g.\tilde{q}^2 - \tilde{r}^2 \not\equiv 0$ :

par l'absurde, supposons $g.\tilde{q}^2 = \tilde{r}^2$

Quitte à simplifier par des facteurs irréductibles, on peut supposer $\tilde{q}$ et $\tilde{r}$ premiers entre eux. On a :

$$g.\tilde{q}^2 = \tilde{r}^2 \Rightarrow \tilde{q}^2 \mid \tilde{r}^2 \Rightarrow \tilde{q} = \text{cte} \quad (\text{car } \tilde{q} \text{ et } \tilde{r} \text{ premiers entre eux})$$

- si $\tilde{q} = 0$, alors $\tilde{r} \equiv 0$ et donc $q$ et $r$ aussi, ce qui est absurde car cela implique que tous les points de $\mathcal{C}$ ($y^2 = g(x)$) vérifient $y.q(x) + r(x) = 0$ ie $f(x,y) = 0$ ie $\mathcal{C} \subset \Gamma$
- On a donc

$$\left.\begin{array}{l} \underbrace{g}_{\text{degré } \leqslant 2} = \dfrac{1}{\tilde{q}^2} \cdot \tilde{r}^2 \end{array}\right) \Rightarrow \deg \tilde{r} \leqslant 1 \text{ donc } \tilde{r} = \alpha(X - \beta)$$

Or, l'équation de $\mathcal{C}$ est
$$y^2 = g(x)$$
$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{\tilde{q}^2}\tilde{r}^2$$
$$\Leftrightarrow y = \pm \frac{\alpha}{\tilde{q}}(x - \beta)$$

ce qui est la réunion de deux droites.

Ceci n'est pas possible car $\mathcal{C}$ est supposée propre.

□

# Ellipse de Steiner

Référence : Mercier-Rombaldi, CAPES externe 2009

Leçons : 144, 180, 181, 182

**Thm :** Soit $f \in \mathbb{C}[X]$ unitaire de degré 3 : $f = (X-r_1)(X-r_2)(X-r_3)$ tel que les points $M_i$ d'affixe $r_i$ non alignés dans le plan $\mathcal{P}$. Alors les racines de $f'$ sont les affixes des foyers d'une ellipse tangente aux trois côtés du triangle $\mathcal{T} = M_1M_2M_3$ en leur milieu.

**Demo :** Soit $A$ milieu de $[M_1M_2]$, $B$ milieu de $[M_2M_3]$, $C$ milieu de $[M_3M_1]$

1er cas : $\mathcal{T}$ équilatéral

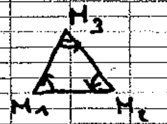
Soit $\omega, \omega'$ racines de $f'$. On a :

$$f' = \begin{cases} 3X^2 - 2\left(\sum r_i\right)X + \sum_{i<j} r_i r_j & (L_1) \\ 3(X-\omega)(X-\omega') & (L_2) \\ \sum_{i<j} (X-r_i)(X-r_j) & (L_3) \end{cases}$$

Montrons que : $\mathcal{T}$ équilatéral $\Leftrightarrow$ $f'$ a une racine double

On : $f'$ racine double $\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow \left(\sum r_i\right)^2 - 3\sum_{i<j} r_i r_j = 0$

$$\Leftrightarrow \sum r_i^2 = \sum_{i<j} r_i r_j \quad : (\mathcal{R})$$




• $\mathcal{T}$ équilatéral $\Rightarrow \widehat{M_1} = \widehat{M_2} = \widehat{M_3} = \theta \in \{\pm \pi/3\}$

$$\Rightarrow \frac{r_2 - r_1}{r_3 - r_1} = \frac{r_3 - r_2}{r_1 - r_2} = e^{i\theta} \quad : (r)$$

$$\Rightarrow (\mathcal{R})$$

• $f'$ racine double $\Rightarrow (\mathcal{R})$

$$\Rightarrow (r)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{M_1} = \widehat{M_2} \\ (M_1M_2)^2 = M_1M_3 \times M_3M_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathcal{T} \text{ isocèle en } M_3 \\ \dots \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M_1M_3 = M_2M_3 \\ (M_1M_2)^2 = (M_1M_3)^2 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{T} \text{ est équilatéral}$$

Comme $\mathcal{C}$ est équilatéral, $f'$ a une racine double : l'ellipse cherchée est donc un cercle (car foyers confondus) d'affixe $\omega = \omega'$. Mais :

$$-3 \times 2\omega = -2\sum x_i \quad \text{donc} \quad \omega = \frac{1}{3}\sum x_i$$

(par $(L_1) = (L_2)$) donc $\omega$ est centre de gravité mais aussi centre du cercle inscrit car $\mathcal{C}$ est équilatéral.

$\mathcal{E}$ est bien l'ellipse cherchée (car toutes les droites spéciales sont confondues :
- hauteurs, pour être tangent aux côtés
- médianes, pour passer en les milieux
- bissectrices, centre du cercle inscrit
)

$\Longrightarrow$

**2^e cas : $\mathcal{C}$ non équilatéral**

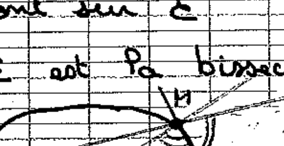
- Soit $\mathcal{E} := \{M \in \mathcal{P} \mid MF + MF' = AF + AF'\}$ où $F, F'$ d'affixe $\omega, \omega'$ distincts. On a bien $A \in \mathcal{E}$ mais est-ce bien une ellipse (et non juste un segment) ?

$\mathcal{E}$ vraie ellipse $\Leftrightarrow AF + AF' > FF' \Leftrightarrow A \notin [FF']$

Par absurde, si $A \in [FF']$ alors $A$ est barycentre à coefficients positifs de $F$ et $F'$. Mais, par le théorème de LUCAS, $F$ et $F'$ sont dans $\mathrm{Conv}(\{M_1, M_2, M_3\}) = \mathcal{C}$ strictement (car $f$ et $f'$ n'ont pas de racines communes). Donc $F$ et $F'$ sont barycentres à coefficients strictement positifs des $M_i$. Par associativité du barycentre, $A$ l'est aussi, ce qui n'est pas possible car $A$ milieu de $[M_1 M_2]$.

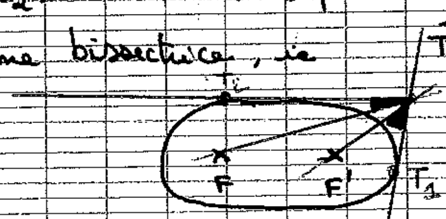
Il reste à voir :
- $(M_1M_2)$ et $(M_1M_3)$ tangentes à $\mathcal{E}$ issues de $M_1$
- $B$ et $C$ sont sur $\mathcal{E}$

- $\boxed{\text{Prop 1}}$ : La tangente en $M \in \mathcal{E}$ est la bissectrice extérieure (bext) en $M$ de $\widehat{FMF'}$.




$\boxed{\text{Prop 2}}$ Thm de Poncelet :

Soit $P$ extérieur à $\mathcal{E}$ par lequel passe deux tangentes à $\mathcal{E}$ en $T_1$ et $T_2$. Alors les couples de droites $((PT_1), (PT_2))$ et $((PF), (PF'))$ ont même bissectrice, i.e. $\boxed{\widehat{T_2PF} = \widehat{F'PT_1}\ [\pi]}$



• Montrons que $(M_1M_2)$ est tangente à $\mathcal{E}$ (en A) issue de $M_1$ ) par prop ①

$\Leftrightarrow$ $(M_1M_2)$ est Bext en A de FAF'

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{AF'}) \equiv (\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AM_2})$ [π]

Or, $\left.\begin{array}{l}(\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{AF'}) = (\overrightarrow{M_2M_1}, \overrightarrow{AF'}) \\ \text{et } (\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AM_2}) = (\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{M_1M_2})\end{array}\right\}$ car $A \in [M_1M_2]$

On voudrait $(\overrightarrow{M_2M_1}, \overrightarrow{AF'}) \equiv (\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{M_1M_2})$ [π] ie $\dfrac{x_1-x_2}{\omega'-a} = \text{cte}\,\dfrac{a-\omega}{x_2-x_1}$

qui est vérifiée en faisant $X = a \left(= \frac{x_1+x_2}{2} = \text{affixe de } A\right)$ dans l'égalité $(L_2)=(L_3)$ (on a cte = 12)

┘

• Montrons que $(M_1M_3)$ est la 2e tangente à $\mathcal{E}$ issue de $M_1$

$\Leftrightarrow (M_1M_3) = (M_1T_2)$ où $T_2$ point de tangence à $\mathcal{E}$ issu de $M_1$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1F'}) = (\overrightarrow{M_1T_2}, \overrightarrow{M_1F'}) \equiv (\overrightarrow{M_1F}, \overrightarrow{M_1T_1})$ [π] car $(M_1M_2)$ tangente à $\mathcal{E}$ issue de $M_1$

Or, par prop 2, c'est égal $\equiv (\overrightarrow{M_1F}, \overrightarrow{M_1M_2})$ [π]

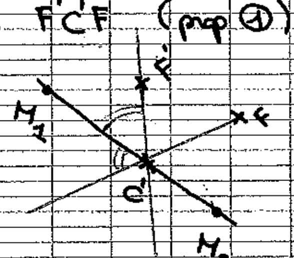
$\Leftarrow \dfrac{x_3-x_1}{\omega'-x_1} = \text{cte}\,\dfrac{\omega-x_1}{x_2-x_1}$

ce qui est vérifié en faisant $X = x_1$ dans l'égalité $(L_2)=(L_3)$

┘

En faisant avec $M_2$ à la place de $M_1$, on a également que $(M_2M_3)$ est tangente à $(\mathcal{E})$. Reste à voir que B et C sont sur $\mathcal{E}$. On le fait juste pour C

• Soit C' point de contact entre $\mathcal{E}$ et $(M_1M_3)$. Montrons que $C = C'$ :
Comme $(M_1M_3)$ tangente à $(\mathcal{E})$, c'est la Bext en C' de F'C'F (prop ①).
Donc le symétrique de F par rapport à $(M_1M_3)$ est sur $(F'C')$, notons-le $F_1$. Donc $C' \in (M_1M_3) \cap (F_1F')$
On voudrait aussi $C \in \underbrace{(M_1M_3)}_{\text{OK car milieu}} \cap (F_1F')$




Or, en faisant $X = c$ dans $(L_2)=(L_3)$ on a $(\overrightarrow{M_3M_1}, \overrightarrow{CF'}) = (\overrightarrow{FC}, \overrightarrow{M_1M_3})$
donc $(M_1M_3)$ est la Bext passant par C de FCF' donc $C \in (F_1F')$
On procède de même pour B. □