137

BARYCENTRES DANS UN ESPACE AFFINE REEL DE DIMENSION FINIE; CONVEXITE. APPLICATIONS.

On se place dans un espace affine $\mathcal{E}$ réel de dimension n

1. Barycentres et coordonnées

1.1. Définitions et premières propriétés [TIS]

Def : Soient $A_1, .. A_K \in \mathcal{E}$ et $\lambda_1, .., \lambda_K \in \mathbb{R}$. On appelle système de points pondérés l'ensemble $((A_i, \lambda_i))_{1 \leq i \leq K}$

Def : Soit $((A_i, \lambda_i))_{1\leq i \leq K}$ un système de points pondérés tel que $\sum_{i=1}^{K} \lambda_i \neq 0$. Il existe un unique point $G \in \mathcal{E}$ vérifiant $\sum_{i=1}^{K} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$. Ce point G est appelé barycentre de ce système de points pondérés et est noté $G = \sum_{i=1}^{K} \lambda_i A_i$ lorsque $\sum_{i=1}^{K} \lambda_i = 1$.

Prop : Les deux caractérisations suivantes du barycentre G d'un système de points pondérés $((A_i, \lambda_i))_{1\leq i\leq K}$ sont équivalentes :

$$\left(\sum_{i=1}^{K} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \right) \Longleftrightarrow \left(\forall \Pi \in \mathcal{E} \ \left(\sum_{i=1}^{K} \lambda_i\right) \overrightarrow{\Pi G} = \sum_{i=1}^{K} \lambda_i \overrightarrow{\Pi A_i} \right)$$

Def : L'isobarycentre des points $A_1, .., A_K$ est le barycentre de ces points affectés de coefficients tous égaux.

Ex : L'isobarycentre de 2 points A et B est le milieu du segment $[AB]$.

Prop : Soit G le barycentre de $((A_i, \lambda_i))_{1\leq i\leq K}$. G vérifie les propriétés suivantes :

- associativité : si $J \subset \{1, .. K\}$ et si $\sum_{i \in J} \lambda_i \neq 0$, alors G est le barycentre du système $\left((A_i, \lambda_i)_{i \notin J}, \left(\sum_{i\in J} \lambda_i A_i, \sum_{i \in J} \lambda_i\right)\right)$
- homogénéité : pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, G est le barycentre de $((A_i, \lambda\lambda_i))_{1\leq i\leq K}$.

Ex : L'isobarycentre des sommets d'un triangle se situe à l'intersection des médianes [figure 1]

Prop : Le sous-espace affine engendré par une partie non vide A de $\mathcal{E}$ est constitué des barycentres des points de A.

Def : Soient $A_0, .., A_n \in \mathcal{E}$. Si les vecteurs $e_i = \overrightarrow{A_0 A_i}$, $1 \leq i \leq n$ forment une base de l'espace vectoriel associé à $\mathcal{E}$, on dit que $(A_0, .., A_n)$ est un repère affine de $\mathcal{E}$.

Def : Soit $\Pi \in \mathcal{E}$. Les coordonnées barycentriques $\lambda_0, \lambda_1, .. \lambda_n$ de Π dans le repère affine $(A_0, .., A_n)$ sont les uniques scalaires, à multiplication par un scalaire près, tels que $\Pi = \lambda_0 A_0 + .. + \lambda_n A_n$.

Ex : Les coordonnées barycentriques des points remarquables d'un triangle ABC :

- centre de gravité : $(1, 1, 1)$ [figure 1]
- orthocentre : $(\tan a, \tan b, \tan c)$ [figure 2]
- centre du cercle inscrit : (a, b, c) [figure 3]

1.2 Applications [TIS]

Soit A, B, C un repère affine fixé de $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$

Prop : Soit $P(p, q, r)$ et $P'(p', q', r')$ des points de $\mathcal{E}$ distincts et leurs coordonnées barycentriques dans le repère affine A, B, C. Alors un point $\Pi(x, y, z)$ appartient à la droite PP' ssi

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ p' & q' & r' \end{vmatrix} = 0$$

Rq : En développant ce déterminant on obtient l'équation de la droite PP' : $xu + yv + zw = 0$ si u, v, w sont non tous égaux.

Ex : Les équations $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ représentent respectivement les droites BC, CA et AB.

Th : (Ménélaüs et Ceva)
On considère le triangle A,B,C. Soient trois points $M(0,r',r'')$, $N(s,0,s'')$, $P(t,t',0)$ appartenant respectivement aux droites BC, CA, AB. Alors :
(1) les points M, N, P sont alignés ssi $r's''t + r''st' = 0$
(2) les droites AM, BN et CP sont parallèles ou concourent ssi $r's''t = r''st'$.

Théorème de Pascal
Soient A,B,C,A',B',C' six points distincts de $\mathcal{E}$ dont trois quelconques ne sont jamais alignés. Alors une conique non dégénérée passe par ces 6 points ssi les "points d'intersection" m, n, p des couples de droites $(BC, B'C')$, $(CA, C'A')$, $(AB, A'B')$ sont alignés.

2. Convexité

[Ber]

2.1 Définitions, exemples, premières propriétés

Déf : Une partie S de $\mathcal{E}$ est dite convexe si $\forall x,y \in S$
$$[x,y] := \{\lambda x + (1-\lambda)y,\ \lambda \in [0,1]\} \subset S$$

Ex : Exemples de parties convexes et non convexes dans le plan [figure 4]

Ex : Les droites, les segments, les sous-espaces affines de $\mathcal{E}$ sont convexes. Si $\mathcal{E}$ est un evn, les boules de $\mathcal{E}$ sont convexes. Dans $\mathbb{R}$, les convexes sont les intervalles.

Ex : Si $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est une application affine entre deux espaces affines et $S \subset \mathcal{E}$, $T \subset \mathcal{F}$ sont des parties convexes alors $f(S)$ et $f^{-1}(T)$ sont des parties convexes. Par exemple si f est une forme affine sur $\mathcal{E}$, alors $\ker f$, $\{f<0\}$ et $\{f>0\}$, etc sont des parties convexes.

Prop : On a les propriétés de stabilité suivantes :
(1) Une intersection quelconque de convexes est convexe
(2) La somme de Minkowski $\lambda S + \mu T = \{\lambda s + \mu t,\ s \in S, t \in T\}$ de deux convexes est convexe $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ dans un e.v.
(3) Le produit cartésien de 2 convexes est convexe dans l'espace affine produit.

Les ensembles convexes occupent une place importante en géométrie affine, comme le montre le théorème suivant :

Théorème fondamental des ensembles convexes : Soit f une bijection de $\mathcal{E}$ dans lui-même. On suppose $\dim \mathcal{E} \geq 2$. Alors f est affine ssi l'image par f de toute partie convexe est convexe.

2.2 Enveloppe convexe

Déf : Si S est une partie de $\mathcal{E}$, on appelle enveloppe convexe de S et on note $co(S)$, l'intersection de tous les convexes contenant S. C'est le plus petit convexe contenant S.

La proposition suivante permet de construire explicitement l'enveloppe convexe d'une partie $S \subset \mathcal{E}$:

Prop : Si $S \subset \mathcal{E}$, alors $co(S)$ est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs d'éléments de S.

Prop : (Th de Lucas). Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Toute racine de P' est dans l'enveloppe convexe des racines de P.

Théorème de Carathéodory : Pour toute partie $S \subset \mathcal{E}$, on a :
$$co(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i,\ x_i \in S,\ \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \right\}.$$
Autrement dit, tout élément de $co(S)$ s'écrit comme barycentre à coefficients positifs d'au plus $n+1$ points.
(DEV 1)

2.3 Convexes dans un evn [BER]

Dans la suite $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$ muni de la **topologie produit** usuelle.

Prop : Soit S un convexe, alors $\overset{\circ}{S}$ et $\bar{S}$ sont convexes.

Prop : Si S est compact, $co(S)$ est compact.

Rq : Ce résultat est faux en dimension infinie.

Th : (Projection sur un convexe fermé)
Soit S un convexe fermé. Soit $A \notin S$. Alors il existe un unique point $B \in S$ tel que :

$$\forall C \in S \quad \|\overrightarrow{AB}\| \leqslant \|\overrightarrow{AC}\|, \ \|\cdot\| \text{ norme usuelle sur } \mathbb{R}^n$$

Ce point B est appelé projeté orthogonal de A sur S. Il est caractérisé par l'inégalité :

$$\langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC} \rangle \leqslant 0 \ \forall C \in S, \ \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ produit scalaire usuel sur } \mathbb{R}^n.$$

Théorème de Hahn-Banach : Soit S un ouvert convexe non vide de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ un sous espace affine de $\mathcal{E}$ tel que $\mathcal{F} \cap S = \emptyset$. Alors il existe un hyperplan affine de $\mathcal{E}$ qui contient $\mathcal{F}$ et ne rencontre pas S.

Déf. Soient A et B deux parties de $\mathcal{E}$. On dit qu'un hyperplan affine défini par le noyau d'une forme affine f sépare (resp. strictement) A et B si A est dans l'un et B est dans l'autre des demi-espaces fermés $\{f \leqslant 0\}$ et $\{f \geqslant 0\}$ (resp. $\{f < 0\}$ et $\{f > 0\}$)

Cor. Soient A et B des convexes non vides de $\mathcal{E}$ tels que $A \cap B = \emptyset$.

(1) Si A est ouvert, il existe un hyperplan séparant A et B.

(2) Si A et B sont ouverts, il existe un hyperplan séparant strictement A et B.

(3) Si A est fermé et B est compact, il existe un hyperplan les séparant strictement.

(4) Si A et B sont fermés, il existe un hyperplan les séparant.

2.4 Points extrémaux [TAU]

Déf : Soit A un convexe de $\mathcal{E}$. On dit que $M \in A$ est un point extrémal de A si toute égalité $M = tP + (1-t)Q$ avec $t \in [0,1]$ et $P, Q \in A$, implique $M = P$ ou $M = Q$.
L'ensemble des points extrémaux de A est noté $Extr(A)$.

Ex : Si $O \in \mathcal{E}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$, on a $Extr(B(O,r)) = S(O,r)$ dans un espace affine euclidien.

Théorème de Krein-Milman : pour tout convexe non vide A de $\mathcal{E}$, on a $A = co[Extr(A)]$.

Ex : [DEV2] [ZUI]

(1) L'enveloppe convexe du groupe orthogonal $O(n)$ est la boule unité $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de la norme subordonnée à la norme euclidienne.

(2) $O(n)$ est l'ensemble des points extrémaux de $\mathcal{B}$.

RÉFÉRENCES

[BER] Berger, Géométrie, Tome 2

[TAU] Tauvel, Géométrie

[TIS] Tisseron, Géométries affines, projectives et euclidienne

[ZUI] Zuily, Éléments d'analyse pour l'agrégation

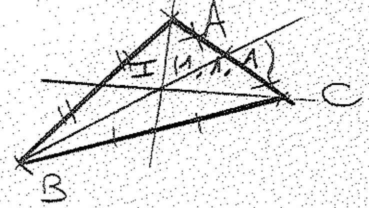


Figure 1

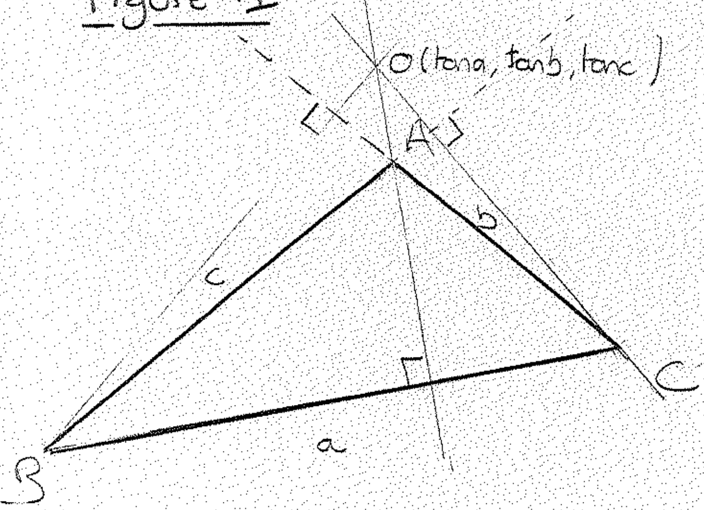


Figure 2

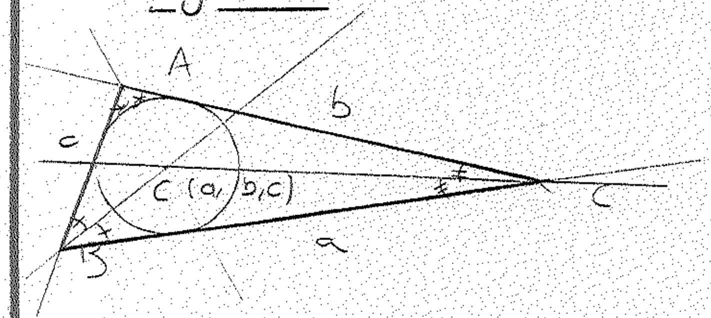
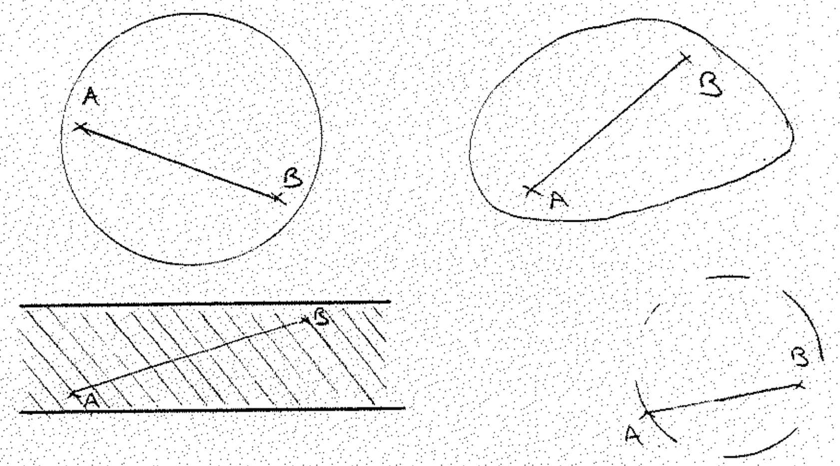
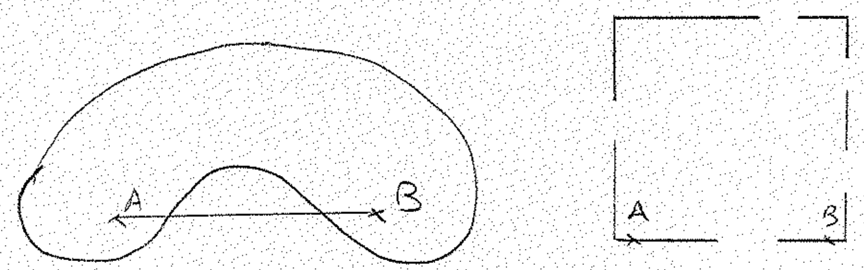


Figure 3



Ensembles convexes



Ensembles non convexes

Figure 4