181

Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

On considère un espace affine réel $\mathcal{E}$ de dimension $N < +\infty$ dirigé par E.

I Barycentre dans un espace affine

1) Définitions et premières propriétés [MER]

Def : On appelle système de points pondérés (SPP) la donnée de n points $A_1, \dots, A_n$ de $\mathcal{E}$ et de n réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

Def : Soit $A_1(\alpha_1), \dots, A_n(\alpha_n)$ un SPP. On définit la fonction de Leibniz par $\varphi : \begin{cases} \mathcal{E} \longrightarrow E \\ M \longmapsto \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \overrightarrow{MA_k} = \left(\sum_{k=1}^{N} \alpha_k\right)\overrightarrow{MO} + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \overrightarrow{OA_k} \end{cases}$

Th-Def : • Si $\sum_{k=1}^{N} \alpha_k = 0$, φ est constante.

• Sinon, φ est bijective. On appelle barycentre du SPP l'unique point $G \in \mathcal{E}$ tel que $\varphi(G) = \vec{0}$.

Exemple : Le barycentre de 2 points pondérés coïncide avec le centre de gravité du système constitué de 2 masses ponctuelles de part et d'autre d'une tige de masse négligeable. Voir Figure 1.

Proposition : L'espace affine engendré par une partie A est l'ensemble des barycentres de points de A (barycentration de A)

Propriétés du barycentre : Soit G le barycentre du SPP $A_1(\alpha_1), \dots, A_n(\alpha_n)$.

(i) Homogénéité : $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$, G est aussi le barycentre de $A_1(\lambda\alpha_1), \dots, A_n(\lambda\alpha_n)$.

(ii) Commutativité : $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$, G est aussi le barycentre de $A_{\sigma(1)}(\alpha_{\sigma(1)}), \dots, A_{\sigma(n)}(\alpha_{\sigma(n)})$.

(iii) Associativité : $\forall J \subset \{1, \dots, n\}$, si $\sum_{j \in J} \alpha_j \neq 0$, G est aussi le barycentre de $\{A_i(\alpha_i)\}_{i \notin J}$, $B(\beta)$ où B est le barycentre des $\{A_j(\alpha_j)\}_{j \in J}$ et $\beta = \sum_{j \in J} \alpha_j$.

Def : Si $\alpha_1 = \dots = \alpha_n$, G est appelé l'isobarycentre des points $A_1, \dots, A_n$. Par homogénéité, on peut prendre $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 1/n$.

Exemple : ([COM]) • L'isobarycentre d'un segment est le milieu du segment

• Dans un triangle, l'isobarycentre est le point d'intersection des médianes.

Voir Figure 2.

Rq : On a envie de définir les coordonnées du barycentre à l'intérieur du triangle.

2) Repérage ([MER])

Déf : Soit $\mathcal{R}=(A_0,\dots,A_N)$ un repère affine de $\mathcal{E}$, i.e $(\overrightarrow{A_0A_1},\dots,\overrightarrow{A_0A_N})$ est une base de E, et $M\in\mathcal{E}$. On appelle système de coordonnées barycentriques de M dans $\mathcal{R}$ tout $(N+1)$-uplet de réels $(\alpha_0,\dots,\alpha_N)$ tel que M soit le barycentre des $A_i(\alpha_i)$.

Rq : **Un tel système** n'est pas unique. Par homogénéité, deux systèmes de coordonnées barycentriques d'un même point sont proportionnels. On appelle système normalisé le système de coordonnées tel que $\sum_{i=1}^{N}\alpha_i=1$.

Exemples : Dans un triangle : • l'isobarycentre $(1/3,1/3,1/3)$
- l'orthocentre $(\tan\hat{A},\tan\hat{B},\tan\hat{C})$
- centre du cercle inscrit (a,b,c)

Voir Figures 3 et 4.

3) Applications ([TAU])

Th (Ménélaüs) : Soit (A_0,A_1,A_2) un repère affine du plan. Soit B_0,B_1,B_2 des points de $]A_0,A_1[$, $]A_1,A_2[$, $]A_2,A_0[$. Alors

(i) B_0,B_1,B_2 sont alignés

$\iff$ (ii) $\left(\overline{A_0B_0}/\overline{A_1B_0}\right)\left(\overline{A_1B_1}/\overline{A_2B_1}\right)\left(\overline{A_2B_2}/\overline{A_0B_2}\right)=1.$

Th (Céva) : Avec les mêmes notations :

(i) (A_2B_0), (A_0B_1), (A_1B_2) sont concourantes ou parallèles

$\iff$ (ii) $\left(\overline{A_0B_0}/\overline{A_1B_0}\right)\left(\overline{A_1B_1}/\overline{A_2B_1}\right)\left(\overline{A_2B_2}/\overline{A_0B_2}\right)=-1.$

Th (Pascal) : Soit $\mathcal{C}$ une conique et a,b,c,a',b',c' 6 points distincts de $\mathcal{C}$. On suppose que les droites (bc') et $(b'c)$ (resp. (ca') et $(c'a)$, (ab') et (ba')) se coupent en u (resp v, w). Alors u,v,w sont alignés. Voir Figure 5.

II Convexité

1) Définitions

Déf : Soient $A,B\in\mathcal{E}$. On appelle segment $[AB]$ est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de A et B -

$[AB]:=\{M\in\mathcal{E},\ \exists t\in[0,1],\ t\overrightarrow{MA}+(1-t)\overrightarrow{MB}=\vec{0}\}.$

Déf : Une partie C de $\mathcal{E}$ est dite convexe si $\forall A,B\in\mathcal{E}$, $[AB]\subset C$.

Exemple : • Un sous-espace affine est convexe.
- Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne, la boule unité est convexe. Voir Figure 6.

Propriétés : (i) L'intersection de 2 convexes est convexe.

(ii) La somme de Minkowski $A+B := \{a+b, a\in A, b\in B\}$ de 2 convexes est convexe.
(iii) Le produit cartésien de 2 convexes est convexe.

Application : Utilisation de la convexité pour un argument d'unicité.

DEV Th (John-Loewner) : Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$. Alors il existe un unique ellipsoïde de volume minimal centré en 0 contenant K.

Application : Soit G un sous-groupe compact de $GL(E)$, alors on peut trouver une forme quadratique définie positive q telle que G soit invariant par q.

2) Enveloppe convexe

Déf : Soit $A \subset \mathcal{E}$. On appelle enveloppe convexe de A (notée $co(A)$) le plus petit convexe contenant A. C'est l'intersection de tous les convexes contenant A.

Ex : Voir Figure 7 : l'enveloppe convexe d'un ensemble de points.

Prop : L'enveloppe convexe de A est l'ensemble des barycentres à coefficients dans $[0,1]$ de points de A.

Application : (Th de Gauss-Lucas) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant. Alors les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P.

Th (Carathéodory) : Soit $A \subset \mathcal{E}$ et $x \in co(A)$. Alors x est combinaison convexe d'au plus $(n+1)$ points de A.

Application : Si A est compacte, $co(A)$ est compacte.

3) Points extrémaux

Déf : Soit $C \subset \mathcal{E}$ convexe et $x \in \mathcal{E}$. On dit que x est extrémal si x n'est pas combinaison convexe non triviale de points de C, i.e. ($x = ta + (1-t)b$, $a,b \in C$, $t \in]0,1[$) $\Rightarrow a = b = x$. On note $Ext(C)$ l'ensemble des points extrémaux de C.

Ex : Figure 8.

Déf : Un hyperplan d'appui de $A \subset \mathcal{E}$ est un hyperplan contenant un point $M \in A$ et séparant M et A au sens large.

Th : Soit K un convexe fermé, alors tout point de ∂K admet au moins un hyperplan d'appui.

Th (Krein-Milman) : Si K est un convexe compact, $K = co(Ext(K))$

Application : Théorème de Birkhoff
Soit $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des matrices bistochastiques, et $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des matrices de permutation. Alors $\mathcal{B}_n = co(\mathfrak{S}_n)$. DEV

Application : résolution de problème de minimisation
$$\inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c(x_i, x_j)\, b_{ij},\ (b_{ij}) \in \mathcal{B}_n \right\}$$

Figure 1 : Barycentre de 2 points pondérés

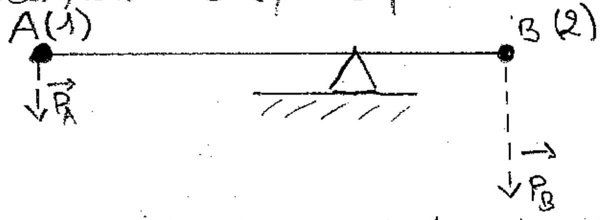
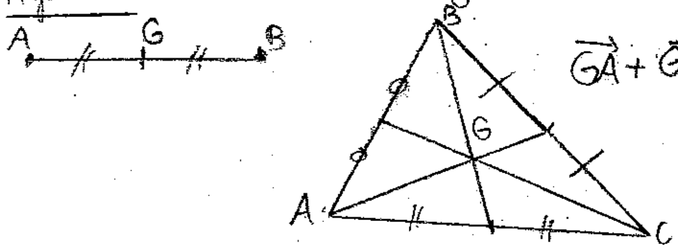


Figure 2 : Isobarycentres du segment et du triangle



$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

Figure 3 : Coordonnées barycentriques de l'orthocentre

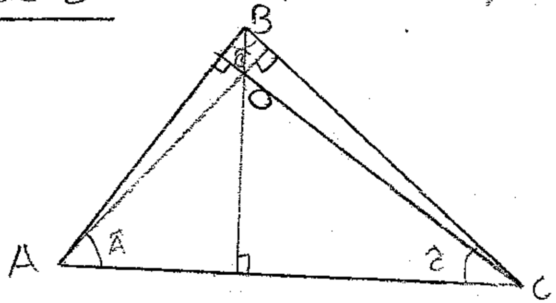


Figure 4 : Coordonnées barycentriques de cercle inscrit

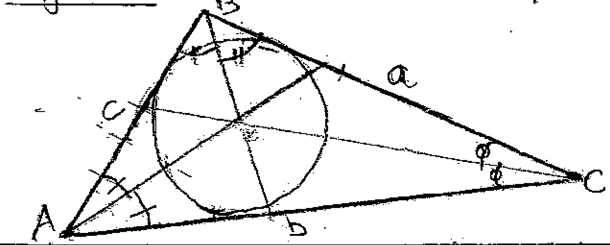


Figure 5 : Le théorème de Pascal

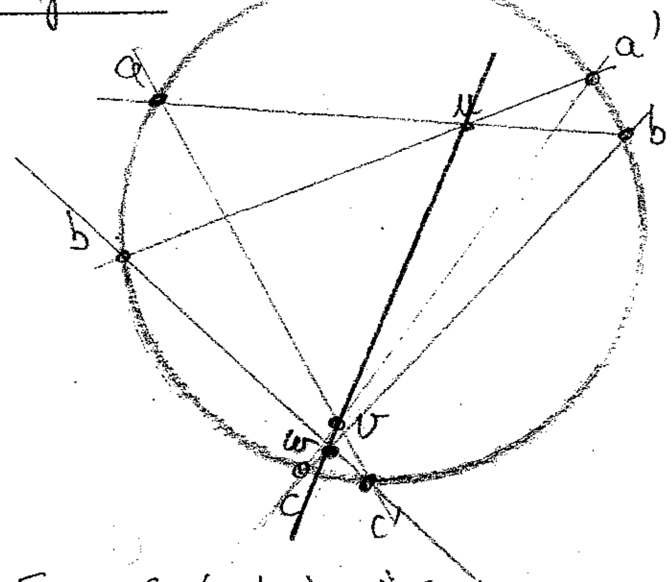


Figure 6 : La boule unité est convexe.

Figure 7 : L'enveloppe convexe d'un ensemble de points

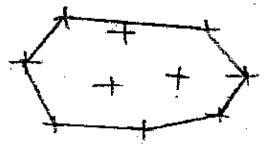


Figure 8 : L'ensemble des points extrémaux d'une partie