

Dans toute la suite, on notera E un espace affine réel de dimension finie n.e.v.

I - Barycentres. [SOR]

A - Définition et propriétés

Def 1: Soient $A_1, \dots, A_d \in E^d$. Soient $d_1, \dots, d_d \in \mathbb{R}^d$ et $\sum_{i=1}^d d_i \neq 0$. Alors il existe un unique G tel que $\sum_{i=1}^d d_i \vec{GA}_i = \vec{0}$

G est dit barycentre du système $((A_i, d_i) ; i \in \{1, \dots, d\})$

De plus, pour tout $M \in E$, $\vec{MG} = \frac{1}{\sum d_i} (\sum d_i \vec{MA}_i)$

Prop 2: Le barycentre est inchangé par la multiplication de tous les poids par une même valeur $\lambda \neq 0$.

Def 3: on appelle isobarycentre le barycentre associé aux points A_1, \dots, A_d avec même poids d .

Ex 4: • Le milieu I d'un segment est l'isobarycentre de ses extrémités.

• Le centre de gravité d'un triangle est l'isobarycentre de ses sommets.

Thm 5: $\text{Bar}((A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)) = \text{Bar}((\text{Bar}(A, \alpha), \beta), \alpha + \beta), (C, \gamma))$

Prop 6: Relation de Chasles (Rappel): $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

B - Fonctions conservant le barycentre.

Def 7: on dit que $f: E \rightarrow E$ conserve le barycentre si $f(\text{Bar}((A, \alpha), (B, \beta))) = \text{Bar}(f(A), \alpha), f(B), \beta)$

Prop 8: $f: E \rightarrow E$ est affine ssi elle conserve le barycentre.

Ex 9: • Les homothéties
• Les translations.

C - Exemples

• Dans le triangle:

- Dans un triangle ABC , la médiane de (BC) est la droite $(A, \text{Bar}((B, \frac{1}{2}), (C, \frac{1}{2})))$.

- on montre par un raisonnement sur les barycentres qu'elles sont concourantes.

• Dans un tétraèdre:

- Les 4 hauteurs du tétraèdre sont concourantes

II - convexité

A - Convexe et enveloppe convexe. [TAU]

Def 10: Soit $a = (A_i)_{i \in I}$ une famille de points de E . Soit $B \in E$. on dit que B est combinaison convexe de a s'il existe une famille presque nulle $(t_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}_+^I$ et $\sum_{i \in I} t_i = 1$ et $B = \sum_{i \in I} t_i A_i$

Def 11: Une partie C de E est convexe si pour tout $A, B \in C$, $[AB] \subset C$

$\Leftrightarrow C$ est étoilé en tous ses points.

Prop 12: (i) Toute intersection de convexes est convexe.

(ii) Tout convexe est connexe par arcs.

(iii) $A \subset E$ est convexe ssi toute combinaison convexe de points de A est dans A .

(iv) L'application $(M, N) \mapsto tM + (1-t)N$ étant continue, l'adhérence d'un convexe est convexe.

Ex 13: • $B(0, R)$, $R > 0$ est convexe
• $\text{Sym}^+(I_1)$ est convexe.

Def 14: Soit $A \subset E$. L'enveloppe convexe de A , notée $C_v(A)$, est l'intersection de tous les convexes contenant A .

Barycentres dans un espace affine de dimension finie, convexité, applications

Prop 15: Soit $A \subseteq E$.

(i) $C_V(A) = \{ \sum_{i \in I} \lambda_i a_i \mid a_i \in A, \sum_{i \in I} \lambda_i = 1, (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}_+^I \text{ presque nulle} \}$

(ii) $\bigcap_{C \text{ convexe fermé, } A \subseteq C} C = \overline{C_V(A)}$

(iii) Si A est ouvert, $C_V(A)$ l'est aussi.

Thm 16 (Carathéodory): Soit $A \subseteq E$. Tout élément de $C_V(A)$ s'écrit comme combinaison convexe de k points de A avec $k \leq 1 + \dim E$.

Cor 17: Soit $A \subseteq E, A \neq \emptyset$.

(i) Si A est compacte, $C_V(A)$ est compacte.

(ii) Si A est bornée, alors $C_V(A)$ est bornée et $\text{diam}(A) = \text{diam}(C_V(A))$

Ex 18: L'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ est $B(0,1)$ pour la norme euclidienne

Lemme 19: Soit $A \subseteq E, A \neq \emptyset, p \in E$ et $\delta = d(p, A)$.

(i) Si A est fermée, il existe $a \in A$ tq $\delta = d(p, a)$

(ii) Si A est convexe, il existe au plus un $a \in A$ tq $\delta = d(p, a)$

(iii) Si A est un convexe fermé, il existe un unique $a \in A$ tq $\delta = d(p, a)$. a est la projection de p sur A .

Thm 20 (Molgaïn) Soient A une partie fermée non vide de E . on suppose que, pour tout $p \in E$, il existe un unique $q \in A$ tq $d(p, q) = d(p, A)$. Alors A est convexe

B- Séparation et points extrémaux

Def 21: Soit $H = \{ x \in E, f(x) = \alpha \}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ un hyperplan affine fermé de E . Quitte à remplacer (f, α) par $(-f, -\alpha)$, on dit que H sépare A et B si:

(i) au sens large si $\forall (a, b) \in A \times B, f(a) \leq \alpha \leq f(b)$

(ii) au sens strict si

$\forall \epsilon > 0, \forall (a, b) \in A \times B, f(a) \leq \alpha - \epsilon < \alpha + \epsilon \leq f(b)$

Thm 22: (Hahn-Banach) [BRE]

Soient A et B deux convexes disjoints non vides de E .

(i) Si A est ouvert, alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens large

(ii) Si A est fermé et B est compact, alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens strict.

Cor 23: Soit K un compact de E . Alors

$x \in C_V(K)$ ssi $\forall T \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}), T(x) \leq \sup_{y \in K} T(y)$.

App 24: Thm de John.

Soit K un compact de E . on suppose que $\text{Int}(K) \neq \emptyset$. Alors il existe un unique ellipsoïde de volume minimal qui contient K .

Def 25: Soit A un convexe de E . on dit que $M \in A$ est un convexe de E si toute égalité du type $M = tP + (1-t)Q$ avec $t \in]0, 1[$, $P, Q \in A \Rightarrow M = P$ ou $M = Q$

on note $\text{Extra}(A)$ l'ensemble des points extrémaux de A .

Ex 26: Si $O \in E$ et $R > 0$, $\text{Extra}(B(0, R)) = S(0, R)$
* $\text{Extra}(B(0, R)) = \emptyset$.

Prop 27: Soit A un convexe de E et $M \in A$. Alors

(i) $M \in \text{Extra}(A)$

(ii) $A \setminus \{M\}$ est convexe

(iii) si M est combinaison convexe d'éléments de A : $\exists \lambda_i, a_i = M \Rightarrow \exists i$ tq $M = a_i$

F
A

INT
P

ETA

ETA

[TAU] Thm 28: (Krein-Milman)

Pour tout convexe compact non vide A de E ,
 $A = C_V(\text{Ext}(A))$

Ex 29: $O_n(\mathbb{R}) = C_V(\text{Ext}(O_n(\mathbb{R})))$

[BER] Thm 30: (Helly) Soit \mathcal{F} une famille de E de cardinal $> n+1$,
famille de convexes. Si \mathcal{F} vérifie:

(i) Toute sous famille à $d+1$ éléments de \mathcal{F} est
d'intersection non vide.

(ii) Tous les éléments de \mathcal{F} sont compacts ou
 \mathcal{F} est finie.

Alors $\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A \neq \emptyset$

Cor 31: Soit une famille finie \mathcal{F} de segments parallèles
admettant trois à trois une sécante commune. Alors la
famille \mathcal{F} toute entière admet une sécante commune.

C. Lien avec les fonctions convexes. [BER].

Def 32: Soit $A \subset E$ un convexe. Une application
 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si pour tout $t \in]0,1[$, pour tout
 $x, y \in A$, on a:

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

Prop 33: Soit $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ où A est convexe. Alors
 f est convexe ssi l'épigraphe de f est convexe
de $X \times \mathbb{R}$

où l'épigraphe de f est $\text{Epi}(f) = \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} : x \in A \text{ et } t \geq f(x)\}$

Prop 34: Soit $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ convexe. Alors f est
continue en tout point de l'intérieur de A .

Prop 35: Soit $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ strictement convexe,
i.e. $\forall t \in]0,1[, \forall x, y \in A, f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y)$.
Si f atteint son minimum, c'est en un point
unique.

Références

- [TAU] Cours de Géométrie, Patrice Tauvel
- [BER] Géométrie, Tome 2, Marcel Berger
- [SAR] Géométrie de l'espace et du plan, Yvonne et René
Souris
- [BRE] Analyse fonctionnelle, théorie et applications,
H. Brezis
- [ALE] Thèmes de Géométrie. Groupes en situation
géométrique, M. Alessandri (pour les développements)



DÉVELOPPEMENT 22

THÉORÈME DE JOHN

Ellipsoïde

Théorème de John. — Un compact K de \mathbb{R}^n contenant 0 dans son intérieur est contenu dans un unique ellipsoïde de volume minimal.

Démonstration. — On note $\text{Sym}^{++}(n)$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives et on définit une application $\mu : \text{Sym}^{++}(n) \rightarrow \mathbb{R}$ en posant $\mu(S) = \frac{1}{\sqrt{\det S}}$. Si $R, S \in \text{Sym}^{++}(n)$ alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que

$$R = {}^tP \begin{bmatrix} r_1 & & \\ & \ddots & \\ & & r_n \end{bmatrix} P \text{ et } S = {}^tP \begin{bmatrix} s_1 & & \\ & \ddots & \\ & & s_n \end{bmatrix} P$$

où les r_i et s_j sont strictement positifs. La convexité de $\text{Sym}^{++}(n)$ assure que, pour tout $t \in [0, 1]$, on a $(1-t)R + tS \in \text{Sym}^{++}(n)$ d'où

$$\begin{aligned} \mu((1-t)R + tS) &= \mu({}^tP \text{diag}((1-t)r_1 + ts_1, \dots, (1-t)r_n + ts_n)P) \\ &= \left(\det({}^tP) \prod_{i=1}^n ((1-t)r_i + ts_i) \det(P) \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= |\det(P)|^{-1} \prod_{i=1}^n ((1-t)r_i + ts_i)^{-\frac{1}{2}} \\ &= |\det(P)|^{-1} \prod_{i=1}^n e^{-\frac{1}{2}(\log((1-t)r_i + ts_i))} \\ &\leq |\det(P)|^{-1} \prod_{i=1}^n e^{-\frac{1}{2}((1-t)\log(r_i) + t\log(s_i))} \end{aligned}$$

par concavité du logarithme, puis

$$|\det(P)| \mu((1-t)R + tS) \leq \prod_{i=1}^n (r_i^{1-t} s_i^t)^{-\frac{1}{2}} \leq \left(\left(\prod_{i=1}^n r_i \right)^{1-t} \left(\prod_{i=1}^n s_i \right)^t \right)^{-\frac{1}{2}}$$

et par convexité de $t \mapsto e^{-\frac{1}{2}t}$, on a (en notant $R = \prod r_i$ et $S = \prod s_i$)

$$|\det(P)| \mu((1-t)R + tS) \leq e^{-\frac{1}{2}((1-t)\log R + t\log S)} \leq (1-t)e^{-\frac{1}{2}\log R} + te^{-\frac{1}{2}\log S}$$

i.e. $\mu((1-t)R + tS) \leq (1-t)\mu(R) + t\mu(S)$ donc l'application μ est convexe sur $\text{Sym}^{++}(n)$. De plus, le cas d'égalité nécessite $r_i = s_i$ pour tout i i.e. $R = S$ et μ est donc strictement convexe.

Notons que la boule unité \mathbb{B}_S pour un produit scalaire défini par $S \in \text{Sym}^{++}(n)$ (i.e. pour un ellipsoïde) est l'image de la boule unité canonique \mathbb{B} par $A = \sqrt{S^{-1}}$. En effet, on a

$$\|X\| \leq 1 \iff {}^tXX \leq 1 \iff {}^t(AX)S(AX) \leq 1 \iff AX \in \mathbb{B}_S.$$

Le théorème de changement de variables donne donc $v(\mathbb{B}_S) = |\det A| v(\mathbb{B})$ i.e. $v(\mathbb{B}_S) = \mu(S)v(\mathbb{B})$, il s'agit donc de minimiser μ sur l'ensemble des $S \in \text{Sym}^{++}(n)$ telles que $K \subset \mathbb{B}_S$.

Notons que si $S \in \text{Sym}^{++}(n)$ et $\lambda > 0$ vérifient $\lambda \mathbb{B} \subset \mathbb{B}_S$ alors $\|S\| \leq \lambda^{-2}$. En effet, si $\|X\| \leq 1$ alors $\lambda X \in \mathbb{B}_S$ donc $\langle \sqrt{S}X, \sqrt{S}X \rangle = \langle SX, X \rangle \leq \lambda^{-2}$ et il s'ensuit que $\|\sqrt{S}\| \leq \lambda^{-1}$ d'où $\|S\| \leq \lambda^{-2}$.

Puisque K est borné, il existe $r > 0$ tel que $K \subset r\mathbb{B}$ i.e. $K \subset \mathbb{B}_{S_0}$ où $S_0 = r^{-2}I_n$. On considère alors l'ensemble

$$\mathcal{C} = \{S \in \text{Sym}^{++}(n) ; K \subset \mathbb{B}_S \text{ et } \mu(S) \geq \mu(S_0)\}$$

qui est un ensemble convexe (du fait de la convexité de μ), non vide (puisque $S_0 \in \mathcal{C}$) et fermé (le seul point non trivial est que la limite d'une suite d'éléments de \mathcal{C} reste symétrique définie positive ce qui est assuré par la condition $\mu(S) \geq \mu(S_0)$ i.e. $\det S \geq \det S_0 > 0$). Comme 0 est un point intérieur de K , il existe $\lambda > 0$ tel que K contienne $\lambda \mathbb{B}$ et il résulte donc de la remarque ci-dessus que $\|S\| \leq \lambda^{-2}$ pour tout $S \in \mathcal{C}$. L'ensemble \mathcal{C} est donc compact. La fonction μ est continue sur le compact \mathcal{C} donc admet un minimum qui est atteint exactement une fois du fait de la stricte convexité de μ . \square

Application. — Tout sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ est conjugué à un sous-groupe du groupe orthogonal.

Démonstration. — Soit G un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$, on pose $K = \bigcup_{A \in G} A\mathbb{B}$. Alors K est compact (car image du compact $G \times \mathbb{B}$ par l'application continue $(A, X) \mapsto AX$) qui contient 0 dans son intérieur (puisque $\mathbb{B} \subset K$) donc K est contenu dans un unique ellipsoïde \mathbb{B}_S de volume minimal.

Soit $B \in G$ alors (d'après la définition de K), on a $BK = K$ d'où $B^p K = K$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$ or $\mathbb{B} \subset K \subset \mathbb{B}_{S_0}$, donc $\mathbb{B} \subset B^p \mathbb{B}_{S_0}$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et il s'ensuit $1 = \mu(I_n) \leq |\det B|^p \mu(S_0)$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$ donc $|\det B| = 1$. Si on pose $R = {}^t B S B$ alors $R \in \text{Sym}^{++}(n)$, $K \subset \mathbb{B}_R$ et $\det R = \det S$ donc $R = S$ par unicité de l'ellipsoïde \mathbb{B}_S . \square

Leçons concernées

22 Déterminants. Applications

25 Formes quadratiques. Applications

30 Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie ; convexité. Applications

Référence

M. Alessandri, *Thèmes de géométrie. Groupes en situation géométrique*, Dunod, 1999.

DÉVELOPPEMENT 12

ENVELOPPE CONVEXE DU GROUPE ORTHOGONAL

On considère l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de la norme $\| \cdot \|_2$ induite par la norme euclidienne de \mathbb{R}^n .

Lemme. — Les formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont les applications

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}, M \mapsto \text{Tr}(AM) \text{ où } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Démonstration. — On considère le morphisme $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})', A \mapsto f_A$ où $f_A(M) = \text{Tr}(AM)$. Il s'agit de montrer que f est un isomorphisme i.e. (puisque $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K})'$) de montrer que f est injective. Si $A = (a_{i,j})$ est telle que $f_A = 0$ alors, pour tous $1 \leq i, j \leq n$, on a

$$0 = f_A(E_{i,j}) = \text{Tr}(AE_{i,j})$$

mais

$$AE_{i,j} = \sum_{1 \leq k, l \leq n} a_{k,l} E_{k,l} E_{i,j} = \sum_{1 \leq k, l \leq n} a_{k,l} \delta_{li} E_{k,l} E_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{k,i} E_{k,i} E_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{k,i} E_{k,j}$$

d'où

$$0 = \text{Tr}(AE_{i,j}) = \text{Tr} \sum_{k=1}^n a_{k,i} E_{k,j} = \sum_{k=1}^n a_{k,i} \text{Tr}(E_{k,j}) = \sum_{k=1}^n a_{k,i} \delta_{kj} = a_{j,i}$$

i.e. $A = 0$. □

Théorème. — L'enveloppe convexe de $\mathcal{O}(n)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la boule unité.

Démonstration. — Il est clair que $\mathbb{B}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ contient l'enveloppe convexe de $\mathcal{O}(n)$, on considère donc une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\|M\|_2 \leq 1$. D'après un corollaire du théorème de Hahn-Banach, pour montrer que M est dans l'enveloppe convexe de $\mathcal{O}(n)$, il suffit de montrer que

$$\varphi(M) \leq \sup_{O \in \mathcal{O}(n)} \varphi(O)$$

pour toute forme linéaire φ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. D'après le lemme, cela revient à montrer que

$$\text{Tr}(AM) \leq \sup_{O \in \mathcal{O}(n)} \text{Tr}(AO), \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

On considère une décomposition polaire $A = \Omega S$ de A (i.e. Ω est orthogonale et S est symétrique positive) et une base orthonormale (e_1, \dots, e_n) de \mathbb{R}^n formée de vecteurs propres de S , alors

$$\sup_{O \in \mathcal{O}(n)} \text{Tr}(AO) \geq \text{Tr}(A\Omega^{-1}) = \text{Tr}(\Omega^{-1}A) = \text{Tr}(S) = \sum_{i=1}^n \|S e_i\|_2.$$

D'autre part, on a

$$\text{Tr}(AM) = \text{Tr}(MA) = \sum_{i=1}^n \langle MA e_i, e_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle A e_i, M^* e_i \rangle$$

d'où d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\text{Tr}(AM) \leq \sum_{i=1}^n \|Ae_i\|_2 \|M^*e_i\|_2 \leq \sum_{i=1}^n \|Ae_i\|_2 \|M^*\|_2 \|e_i\|_2.$$

Mais $\|M\|_2 \leq 1$ implique que $\|M^*\|_2 \leq 1$ et la base (e_1, \dots, e_n) est orthonormale donc

$$\text{Tr}(AM) \leq \sum_{i=1}^n \|Ae_i\|_2 \leq \sum_{i=1}^n \|\Omega S e_i\|_2 = \sum_{i=1}^n \|S e_i\|_2$$

et on a finalement bien $\text{Tr}(AM) \leq \sup_{O \in \mathcal{O}(n)} \text{Tr}(AO)$. \square

On rappelle qu'un élément U de \mathbb{B} est dit *extrémal* si toute écriture du type $U = \frac{1}{2}(V + W)$ avec $V, W \in \mathbb{B}$ implique $U = V = W$.

Théorème. — $\mathcal{O}(n)$ est l'ensemble des points extrémaux de la boule unité.

Démonstration. — Notons tout d'abord que si $\|U\| < 1$ alors U n'est pas extrémal; en effet, si $U = 0$ alors $U = \frac{1}{2}(I + (-I))$ et si $U \neq 0$ alors $U = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\|U\|} U + (2 - \frac{1}{\|U\|}) U \right)$.

D'autre part, tout élément $U \in \mathcal{O}(n)$ est extrémal; en effet, écrivons $U = \frac{1}{2}(V + W)$ alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $2Ux = Vx + Wx$ d'où

$$4\|x\|^2 = \|2Ux\|^2 = \|Vx\|^2 + \|Wx\|^2 + 2\langle Vx, Wx \rangle \leq \|V\|^2 \|x\|^2 + \|W\|^2 \|x\|^2 + \|V\| \|W\| \|x\|^2 \leq 4\|x\|^2$$

ce qui implique que les inégalités ci-dessus sont en fait des égalités i.e. on a

$$\|Vx\| = \|x\|, \quad \|Wx\| = \|x\| \quad \text{et} \quad \langle Vx, Wx \rangle = \|Vx\| \|Wx\|;$$

la dernière égalité implique que Vx et Wx sont positivement liés et les deux premières montrent donc qu'on a en fait $Vx = Wx$, d'où $U = V = W$.

Soit A un élément extrémal de la boule unité, on en considère une décomposition polaire $A = SO$, ce qui peut aussi s'écrire

$$A = {}^t\Omega D \Omega \quad \text{où} \quad D = \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix}$$

et $\Omega, O \in \mathcal{O}(n)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$. D'autre part on a $\|A\| = \|D\| = \sup_{1 \leq i \leq n} d_i$ donc $0 \leq d_i \leq 1$ pour tout i . Supposons que l'un des d_i soit non nul, par exemple $d_1 \neq 0$, et posons

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & d_2 & \\ & & \ddots \\ & & & d_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D_2 = \begin{bmatrix} 2d_1 - 1 & & \\ & d_2 & \\ & & \ddots \\ & & & d_n \end{bmatrix}$$

puis $V = {}^t\Omega D_1 \Omega$ et $W = {}^t\Omega D_2 \Omega$ alors $V \neq W$, $\|V\| = \|D_1\| \leq 1$, $\|W\| = \|D_2\| \leq 1$ et $A = \frac{1}{2}(V + W)$ ce qui contredit le caractère extrémal de A . Par conséquent, tous les d_i sont nuls i.e. $A = {}^t\Omega \Omega = O \in \mathcal{O}(n)$. \square