182
139

APPLICATION DES NOMBRES COMPLEXES A LA GEOMETRIE

I Géométrie euclidienne

1. Liens

Le plan $\mathbb{R}^2$ est identifié à $\mathbb{C}$ par $(x,y)\longmapsto x+iy$

Def (Affixe) L'affixe de $M(x,y)$ est $z_M = x+iy$ (vecteur image) de $z\in\mathbb{C}$ a pour coordonnées $(\mathrm{Re}\,z, \mathrm{Im}\,z)$

Prop: $\vec{u}\cdot\vec{v} = \mathrm{Re}[\overline{z_{\vec u}}\times z_{\vec v}]$ $\quad \det(\vec u,\vec v) = \mathrm{Im}[\overline{z_{\vec u}}\times z_{\vec v}]$

Conséquence: • $\vec{AB}\cdot\vec{CD} = \mathrm{Re}[\overline{(z_B-z_A)}(z_D-z_C)]$

• $\mathrm{Vol}(ABDC) = \mathrm{Im}[\overline{(z_B-z_A)}(z_D-z_C)]$

Application: • $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ colinéaires ssi $\overline{(z_B-z_A)}(z_D-z_C)\in\mathbb{R}$

• Droite passant par A, dirigée par $\vec u$:

$\{z\in\mathbb{C},\ \overline{(z-z_A)}\,z_{\vec u}\in\mathbb{R}\}$

• $\vec{AB}\perp\vec{CD}$ ssi $\overline{(z_B-z_A)}(z_D-z_C)\in i\mathbb{R}$

• $\|\vec{AB}\|^2 = |z_B-z_A|^2$

• Cercle de centre O, de rayon R :

$\{z\in\mathbb{C},\ |z-z_0| = R\}$

2. Angles

Prop: $\vec u,\vec v$ unitaires, alors il existe une unique rotation qui envoie $\vec u$ sur $\vec v$

on définit $(\vec u,\vec v)\,\mathcal{R}\,(\vec u',\vec v')$ si c'est la même rotation

$\mathcal{A}$ = couples de vecteurs unitaires, on définit

$$\begin{tikzcd} \Phi : \mathcal{A} \arrow[r, "\text{rotation}", "\text{associée}"'] \arrow[d] & \underbrace{O^+(\mathbb{R}^2)}_{\text{groupe}} \\ \mathcal{A}/\mathcal{R} \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

$\tilde\Phi$: bijective

Def (Angle orienté) de $(\vec u,\vec v)$ est sa classe dans $\mathcal{A}/\mathcal{R}$

$\mathcal{A}/\mathcal{R}$ hérite de la structure de groupe de $O^+(\mathbb{R}^2)$

Prop (relation de Chasles) $(\vec u,\vec v)+(\vec v,\vec w) = (\vec u,\vec w)$

Chaque rotation est caractérisée par un nombre complexe de module 1. Plus précisément on a les morphismes :

$$\mathbb{R}\xrightarrow{\varphi}\mathbb{U}\longrightarrow O^+(\mathbb{R}^2)\longrightarrow\mathcal{A}/\mathcal{R}$$

$$\underbrace{\theta\longmapsto e^{i\theta}}_{\substack{\text{surjectif}\\ \text{non-injectif}}}\underbrace{\longmapsto(z\mapsto e^{i\theta}z)}_{\text{bijectif}}\underbrace{\longmapsto((0,1),(\cos\theta,\sin\theta))}_{\text{bijectif}}$$

Def : on note π le nombre tel que $\ker\varphi = 2\pi\mathbb{Z}$

si $(\vec u,\vec v)\in\mathcal{A}/\mathcal{R}$ est associé par le morphisme à $\theta\in\mathbb{R}$

on dit que θ est une mesure de $(\vec u,\vec v)$

Application: • coordonnées polaires :

$\forall z\in\mathbb{C}\setminus\{0\},\ \exists!(r,\theta)\in\mathbb{R}_+^*\times[0,2\pi[$ tel que $z = re^{i\theta}$

• A,B,C équilatéral $\Leftrightarrow (z_A-z_B)^2+(z_B-z_C)^2+(z_C-z_A)^2 = 0$

• Les racines n-ème de l'unité sont les sommets d'un n-gone régulier

• Théorème de l'angle au centre.

3. Transformations du plan

Def (Isométries directes) $= \{(z\mapsto az+b),\ a\in\mathbb{U}, b\in\mathbb{C}\}$ notée Isom^+

C'est le groupe engendré par les rotations et translations

Prop: Isom^+ conserve les distances et les angles orientés

Def (Isométries) $\mathrm{Isom} = \langle \mathrm{Isom}^+, (z \mapsto \bar{z}) \rangle$

on rajoute les symétries /au droites

Prop Isom conserve les distances

Def (similitudes) $= \langle \mathrm{Isom} \cup \{(z \mapsto Rz), R \in \mathbb{R}_+^*\} \rangle$

Prop : Les similitudes conservent les rapports de distances.

Application : • La développée d'une cycloïde est une cycloïde.

• Théorème de Napoléon

4. Polynomes et barycentre

Le barycentre de $A_1(\alpha_1), \dots, A_n(\alpha_n)$ est l'unique G tel que $z_G = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_{A_i}$

Th (Gauss Lucas)
soit $P \in \mathbb{C}[X]$, les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P

DEV

Th (Ellipse de Steiner)
soient $A, B, C \in \mathcal{P}$ distincts et $P(X) = (X - z_A)(X - z_B)(X - z_C)$
l'ellipse dont les foyers ont pour affixe les racines de P' et tangente à l'un des côtés est tangente aux trois côtés en leurs milieux.

Prop c'est l'unique ellipse de volume maximal parmi celles inscrites dans ABC

II Droites projective complexe

Def $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \dfrac{\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}}{\text{relation de colinéarité}}$ munit de la topologie quotient

autres définitions équivalentes :

- $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$: compactifié d'Alexandroff de $\mathbb{C}$
- $\mathcal{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ munit de sa topologie usuelle

projection stéréographique : $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \simeq \mathcal{S}^2$

ces trois espaces sont compacts.

2. Homographie

Def $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ homographie si

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{az+b}{cz+d} & \text{si } z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \\ \infty & \text{si } z = -\frac{d}{c} \\ a/c & \text{si } z = \infty \end{cases}$$

où $ad - bc \neq 0$

on note $PGL_2(\mathbb{C})$ l'ensemble des homographies

Remarque : on peut définir une homographie comme une application $\in GL_2(\mathbb{C})$ que l'on applique à $\mathbb{C}^2 \setminus$ colinéarité

Prop on a un isomorphisme : $PGL_2(\mathbb{C}) \simeq \dfrac{GL_2(\mathbb{C})}{\{\lambda I_2, \lambda \in \mathbb{C}^*\}}$

prop : $PGL_2(\mathbb{C})$ est un sous-groupe des homéomorphismes de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$

Prop :

• $GL_2(\mathbb{C}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, b \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{C}^* \right\rangle$

• $PGL_2(\mathbb{C}) = \langle z \mapsto z + b, z \mapsto az, z \mapsto \frac{1}{z}, b \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{C}^* \rangle$

Application : • Point fixe et suite homographique

• Action de $PGL_2(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$

3. Birapport

Th $PGL_2(\mathbb{C})$ agit sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ de manière 3-transitive et simplement

En d'autres termes il existe une unique homographie qui envoie 3 points distincts sur 3 points distincts.

Def (Birapport) soient $M, N, P \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ distincts et $Q \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ on définit $[M,N,P,Q]$ comme l'image par Q de l'unique homographie qui envoie M sur 0, N sur ∞, P sur 1.

Rq : Expression analytique de $[M,N,P,Q] = \left(\frac{z_Q - z_N}{z_Q - z_M}\right) \times \left(\frac{z_P - z_N}{z_P - z_M}\right)^{-1}$

Prop

$[a,b,c,d] = [b,a,c,d]^{-1} = [a,b,d,c]^{-1}$

Prop soient a,b,c,d avec a,b,c distincts et a',b',c',d' avec a',b',c' distincts alors :

Il existe une homographie qui envoie a sur a', b sur b', c sur c' et d sur d'

si et seulement si $[a,b,c,d] = [a',b',c',d']$

ceci permet de montrer :

Th soit f une bijection de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ alors f est une homographie ssi f conserve les birapports

Prop 4 points sont cocycliques ou alignés ssi leur birapport est réel

Corollaire: Les homographies préservent les cercles et droites.

Application : • Théorème de Ptolémé : un quadrilatère convexe est inscriptible ssi le produit des longueurs des diagonales est la somme des produits des longueurs des côtés opposés.

• Alternative de Steiner

soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles où $\mathcal{C}$ est à l'intérieur de $\mathcal{C}'$. soit Γ_1 un cercle tangent intérieurement à $\mathcal{C}'$ et extérieurement à $\mathcal{C}$. On construit $(\Gamma_i)_{i\geq 1}$ par récurrence tel que Γ_{i+1} est tangent à Γ_i, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, et soit différent de Γ_{i-1}.

s'il existe $n > 1$ tel que $\Gamma_n = \Gamma_1$ alors le résultat est vrai pour le même n quel que soit le choix de Γ_1

4. Le groupe circulaire

Def $G = \langle \text{Homographies}, (z \mapsto \bar{z}) \rangle$

Th G est exactement le groupe des transformations de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ préservant les cercles ou droites. DEV

Ref : AUDIN : Géométrie
BERGER : ———
GRIMAN : ——— élémentaire
AVEZ : La leçon de géométrie à l'oral de l'agreg