182

Applications des nombres complexes à la géométrie

I) Géométrie euclidienne

On se placera dans $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ dans cette partie.

1) Définitions et quelques propriétés

On identifiera $M = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ avec son affixe $z_M = x + iy \in \mathbb{C}$. On notera $M(z)$ pour signifier $z = z_M$.

On note $Re(z_M) = x$ la partie réelle et $Im(z_M) = y$ la partie imaginaire de z_M.

PROP: Soient $M, M' \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\begin{cases} Re(\overline{z_M} z_{M'}) = \vec{OM} \cdot \vec{OM'} \\ Im(\overline{z_M} z_{M'}) = \det(\vec{OM}, \vec{OM'}) \end{cases}$$

Applications:

(a) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires ssi $\overline{z_{\vec{u}}} z_{\vec{v}} \in \mathbb{R}$

(b) équations de droites: $\overline{A} z + A \overline{z} + B = 0$.

(c) $\|\vec{u}\| = |z_{\vec{u}}|$

(d) Aire d'un triangle $A(a) B(b) C(c)$:

$$S = \frac{1}{4i}\left((a-b)\overline{c} + (b-c)\overline{a} + (c-a)\overline{b}\right)$$

Points remarquables:

Dans un repère centré au centre du cercle circonscrit à un triangle $A(a)B(b)C(c)$:

- centre de gravité G : $z_G = \frac{a+b+c}{3}$.
- orthocentre H : $z_H = a+b+c$

2) Angles

PROP: Soient $\vec{u}, \vec{v} \in S^1$. Alors il existe une unique rotation envoyant $\vec{u}$ sur $\vec{v}$.

On en déduit une relation d'équivalence:

$((\vec{u},\vec{v}) \mathcal{R} (\vec{u'},\vec{v'}))$ ssi la même rotation envoie $\vec{u}$ sur $\vec{u'}$ et $\vec{v}$ sur $\vec{v'}$)

DEF: L'angle orienté de $(\vec{u},\vec{v})$ est sa classe dans $S^1/\mathcal{R}$.

PROP: $\mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{U} \hookrightarrow\!\!\!\!\twoheadrightarrow O^+(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow\!\!\!\!\twoheadrightarrow S^1/\mathcal{R}$

$\theta \mapsto e^{i\theta} \mapsto (z \mapsto e^{i\theta} z) \longmapsto \overline{((0,1),(\cos\theta, \sin\theta))}$

où $\mathbb{U}$ est l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Coordonnées polaires: tout $z \in \mathbb{C}$ s'écrit $z = re^{i\theta}$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$ unique et $\theta \in \mathbb{R}$ défini uniquement modulo 2π

Applications:

- un triangle d'affixes a, b, c est équilatéral ssi $(a-c) = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-c)$.
- En notant $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, le triangle est:
  - direct ssi $a + bj + cj^2 = 0$
  - indirect ssi $a + bj^2 + cj = 0$
- Un triangle ABC tel que $a+b+c \neq 0$ est équilatéral ssi

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = 0.$$

- Les racines n-ièmes de l'unité sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés.

3) Transformations du plan

DEF: Les similitudes directes sont les applications $z \mapsto az + b$ où $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$.

PROP: Il s'agit du groupe engendré par les rotations, homothéties et translations.

COR: Les similitudes directes conservent les angles orientés et les rapports de distances.

DEF: La conjugaison complexe: $z \mapsto \overline{z}$. C'est la réflexion d'axe (Ox).

PROP: $\mathcal{O}_2$ groupe engendré par les similitudes directes avec $a \in \mathbb{U}$, et la conjugaison, est l'ensemble des isométries du plan.

DEF : L'inversion analytique (resp. géométrique) de pôle $a \in \mathbb{C}$ et de rapport $k \neq 0$ est l'application qui à $z \in \mathbb{C}$ associe z' tel que $(z'-a)(z-a) = k$ $(z \neq a)$ (resp. $(z'-a)\overline{(z-a)} = k$).

REM : En notant $A(a)$, $M(z)$, $M'(z')$, l'inversion géométrique admet pour définition équivalente :
A, M, M' alignés et $\overline{AM} \times \overline{AM'} = k$ (longueurs algébriques)

PROP : Si $M \mapsto M'$ et $N \mapsto N'$ par une inversion de pôle A et de rapport k alors :
$$M'N' = k\frac{MN}{AM \times AN}.$$

Application :

TH : (Ptolémée) Un quadrilatère convexe ABCD est inscriptible dans un cercle si
$$AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC.$$

4) Polynômes et barycentre

Le barycentre de $A(\alpha_1), \dots, A_m(\alpha_m)$ est l'unique point G tel que $z_G = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i z_{A_i}$.

TH : (Gauss-Lucas) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe de celles de P.

TH : (Ellipse de Steiner) (DEV)
Soient $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ trois points distincts du plan affine. Si on note $P = (X-a)(X-b)(X-c)$ et ω_1, ω_2 les racines de P', alors l'ellipse de foyers $F_1(\omega_1)$ et $F_2(\omega_2)$ tangente en un côté du triangle ABC est tangente à tous les côtés en leur milieu.

II Géométrie projective complexe

1) Définitions

DEF : L'espace projectif $P(E)$ déduit d'un espace vectoriel E de dimension finie n est l'ensemble des droites vectorielles de E, i.e $(E \setminus \{0\})/$colinéarité.
On le note $P_n(K)$ ou $P(K^{n+1})$ lorsque $E = K^{n+1}$ de K corps.

DEF : La droite projective complexe est $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.

REM : On peut définir $\mathbb{P}_1$ de manière équivalente comme $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, lui-même homéomorphe à S^2 par projection stéréographique.

2) Homographies

DEF : Une homographie $g : P(E) \to P(E')$ est une application telle qu'il existe un isomorphisme linéaire $f : E \to E'$ tel que $p' \circ f = g \circ p$ où p, p' sont les projections $E \to P(E)$ et $E' \to P(E')$.

PROP : Les homographies forment un groupe noté $PGL(E)$ tel que $PGL(E) \simeq GL(E)/$homothéties.

REM : Une homographie $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ s'écrit pour $x, y \in \mathbb{C}$, $f(x,y) = (ax+by, cx+dy)$ qui se simplifie en $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ avec la convention que $-\frac{d}{c} \mapsto \infty$ et $\infty \mapsto \frac{a}{c}$ (on a toujours $ad-bc \neq 0$).

PROP : Une homographie s'obtient par similitudes et inversion analytique. (décomposer en éléments simples).

PROP : Un élément de $PGL_2(\mathbb{C})$ conserve les angles orientés.

3) Birapport

TH : $PGL(E)$ agit sur $P(E)$ 3-transitivement et simplement.

cela revient à dire qu'il existe une conique homographie qui envoie 3 points distincts sur 3 points distincts.

DEF (birapport) Soient $a, b, c \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ distincts, et $d \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$. Le birapport de (a, b, c, d) noté $[a, b, c, d]$ est l'image de d par l'unique homographie qui envoie a sur 0, b sur ∞ et c sur 1.

REM: Avec la convention pour $z = (x, y) \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ avec $y \neq 0$ de noter $z = \frac{x}{y}$, on a l'expression :

$$[a, b, c, d] = \frac{d-a}{d-b} : \frac{c-a}{c-b}$$ (d'où le terme « birapport »)

PROP: $[a, b, c, d] = [b, a, c, d]^{-1}$

$[c, b, a, d] = 1 - [a, b, c, d]$

REM: On peut montrer qu'en permuttant a, b, c et d on peut obtenir au plus 6 birapports différents.

PROP: Soient (a_1, a_2, a_3, a_4) et (a'_1, a'_2, a'_3, a'_4) deux quadruplets de points de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ dont les trois premiers sont distincts deux à deux. Alors pour qu'il existe une homographie envoyant l'un sur l'autre il faut et il suffit que les birapports soient les mêmes.

DEF: (division harmonique) On dit que quatre points alignés et distincts forment une division harmonique quand leur birapport vaut -1.

Exemple: Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$. Alors :

$$[a, b, \infty, c] = -1 \text{ ssi } c = \frac{a+b}{2}.$$

4) Groupe circulaire

PROP: Le birapport de quatre points alignés sur une droite affine réelle contenue dans $\mathbb{C}$ coïncide avec leur birapport comme points de la droite affine complexe $\mathbb{C}$.

PROP: Quatre points de $\mathbb{C}$ sont alignés ou cocycliques ssi leur birapport est réel.

COR: Toute homographie de la droite projective complexe transforme un cercle ou une droite de $\mathbb{C}$ en un cercle ou une droite de $\mathbb{C}$.

DEF: (groupe circulaire) On appelle groupe circulaire le groupe engendré par les homographies et la conjugaison complexe.

PROP: Le groupe circulaire est engendré par les inversions et les réflexions.

COR: Les éléments du groupe circulaire préservent les angles non orientés.

TH: Le groupe circulaire est exactement l'ensemble des bijections de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ qui laissent stable l'ensemble droites-cercles. (DEV)

Références:

Audin : Géométrie

Eiden : Géométrie analytique classique

autres pistes possibles :

- AVEZ : La leçon de géométrie à l'oral de l'agreg
- Hahn : Complex numbers & Geometry
- Le Perrin pour sa partie sur les quaternions.