182 : Utilisation des nombres complexes en géométrie. Homographies

Les nombres complexes sont un outil qui peut s'avérer être puissant lorsqu'on l'applique en géométrie planaire. Il s'agit de mieux comprendre ce lien.

I Géométrie plane

1) Modélisation du plan par $\mathbb{C}$

Def 1: Si $P=(x,y)$ et Q sont deux points de $\mathbb{R}^2$, on définit l'affixe z_P de P par le complexe $z_P = x+iy$. L'affixe $z_{\vec{PQ}}$ de $\vec{PQ}$ est $z_Q - z_P$.

Prop 2: L'affixe d'un vecteur ne dépend pas du représentant, et pour $P,Q,R \in \mathbb{R}^2$,
- $\operatorname{dist}(P,Q) = \|\vec{PQ}\| = |z_Q - z_P|$
- l'angle $(\vec{PQ},\vec{PR})$ vaut $\arg\left(\frac{z_R - z_P}{z_Q - z_P}\right)$

Exemples 3:
- $\vec{u},\vec{v}$ sont colinéaires ssi $\overline{z_{\vec{u}}}\, z_{\vec{v}} \in \mathbb{R}$
- un triangle ABC est équilatéral ssi $|z_B - z_A| = |z_C - z_C| = |z_A - z_C|$ ssi $z_B - z_A = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}(z_C - z_A)$
- un cercle de centre C et de rayon r est l'ensemble des P tels que $|z_P - z_C| = r$ (ou $\exists \theta \in \mathbb{R},\ z_P = z_C + re^{i\theta}$)
- La droite $\mathcal{D}$ passant par P et Q est l'ensemble des points d'affixe $z_P + \lambda z_{\vec{PQ}}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$
- La droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ $(a,b,c \in \mathbb{R})$ a pour équation d'affixes $\bar{A}z + A\bar{z} + c = 0$ avec $A = \frac{1}{2}(a+ib)$

Thm 4: Soit $(P_0,\dots,P_n)$ $n+1$ points du plan d'affixes $(z_0,\dots,z_n)$ [SGN] p.27
$(P_1 \dots P_n)$ est un polygone de centre P_0 ssi $\forall P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$, $P(z_0) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P(z_k)$

2) Similitudes Planes

Def 5: Une similitude plane est une application du plan qui multiplie toutes les distances par un réel fixe, appelé rapport de la similitude.

Dans la suite, on confondra l'application du plan et l'application de $\mathbb{C}$ sur les affixes.
F est donc une similitude de rapport r ssi $\forall z,z' \in \mathbb{C},\ |F(z)-F(z')| = r|z-z'|$.

Exemples 6:
- une rotation R de centre O d'angle θ est une similitude ; $R : z \mapsto z.e^{i\theta}$
- une homothétie H de centre O de rapport k est une similitude ; $H : z \mapsto kz$.
- une translation T de vecteur $\vec{v}$ est une similitude ; $T : z \mapsto z + z_{\vec{v}}$
- la symétrie d'axe (Ox) est une similitude ; $z \mapsto \bar{z}$
- $z \mapsto z^2$ n'est pas une similitude.

Thm 7: Si F est une similitude, alors il existe $a,b \in \mathbb{C}$ tels que :
$F : z \mapsto az+b$ ou $F : z \mapsto a\bar{z}+b$

Coro 8: Les similitudes planes sont bijectives, conservent les alignements et les angles. Une similitude conserve les angles orientés (et est dite directe) ou bien les inverse toutes.
L'ensemble des similitudes (resp. similitudes directes) est un groupe pour la loi de composition, engendré par les rotations et homothéties en O, les translations et la symétrie d'axe Ox (resp rotations et homothéties en O et translations).

Rq 9: Conserver les rapports de distance implique donc de conserver les angles. On verra en III 1) que la réciproque est fausse.

3) Applications

Thm 10 [de Napoléon] cf annexe A. [Hahn] p61 ; [Avez] p8-9 DEV?
Soit ABC un triangle. On construit γBA, αCB et βAC semblables extérieurs. Alors ABC et $\alpha\beta\gamma$ ont le même centre de gravité, $(A\alpha)$, $(B\beta)$ et $(C\gamma)$ sont concourantes. Si de plus les 3 triangles sont équilatéraux, alors $A\alpha = B\beta = C\gamma$, et les centres de gravité de ces triangles forment un triangle équilatéral.

Thm 11 [Ellipse de Steiner] cf Annexe B [Eiden] p.207 [Tissier] p226 DEV?
Soit ABC un triangle, $P = (X-z_A)(X-z_B)(X-z_C)$.
Il existe une unique ellipse tangente en les milieux de $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$, et ses deux foyers ont pour affixes les racines de P'.

II Droite projective et homographies [Rhgg] ch.X [Audin] ch.VI

1) $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ et sphère de Riemann

Def 12: On pose sur $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ la relation d'équivalence $x \sim y$ si $\exists \lambda \in \mathbb{C}^*, x = \lambda y$
La droite projective complexe est alors $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) := \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} / \sim$

Rq 13: $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \simeq \{\text{droites complexes de } \mathbb{C}^2\} \simeq \mathbb{S}^2 / \{x \sim -x\}$

Rq 14: Avec $\mathcal{D}$ la droite affine $\{(1,z), z \in \mathbb{C}\}$, on remarque que toute droite vectorielle de $\mathbb{C}^2$ coupe $\mathcal{D}$ en un unique point, sauf la droite $\{(0,z), z \in \mathbb{C}\}$, et que par chaque point de $\mathcal{D}$ passe une telle droite.
$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est donc en bijection avec $\mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ cf. Annexe C

Prop 15: Tout ouvert de $\mathbb{C}$ est image par l'application précédente d'un ouvert de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$
On peut donc transférer la topologie quotient de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ à $\mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$
Les nouveaux ouverts sont les complémentaires des compacts de $\mathbb{C}$

Def16: Soit $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ la sphère euclidienne réelle, $N=(0,0,1)$, $\mathcal{P}$ le plan (Oxy).
Pour $M \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$, on définit son projeté stéréographique par l'affixe dans $\mathcal{P}$ de l'intersection de (MN) avec $\mathcal{P}$. Le projeté de N est $\{\infty\}$. *cf. Annexe D*

Thm17: L'application $p_N : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{C} \sqcup \{\infty\} \simeq \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ ainsi créée est un homéomorphisme, et les images des cercles de $\mathbb{S}^2$ sont | les cercles de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$
| les cercles ou les droites de $\mathbb{C}$

2) Homographies

Rq18: L'action de $GL_2(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{C}^2$ préserve les droites. Cela induit donc une action de $GL_2(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$

Def19: Deux matrices de $GL_2(\mathbb{C})$ sont équivalentes si elles définissent la même action. Le quotient de $GL_2(\mathbb{C})$ pour cette relation est noté $PGL_2(\mathbb{C})$ et appelé groupe projectif linéaire complexe. Ses éléments sont appelés homographies

Thm20: $PGL_2(\mathbb{C}) \approx GL_2(\mathbb{C}) / \mathbb{C}.I_2 \approx \{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, a,b,c,d \in \mathbb{C}, ad-bc \neq 0 \}$
(avec les conventions $a.\infty = \infty$, $b+\infty=\infty$, $0.\infty = 0$, $\frac{z}{0} = \infty$, $\frac{a.\infty+b}{c.\infty+d} = \frac{a}{c}$, $a,c;z \in \mathbb{C}^*$, $b,d \in \mathbb{C}$)

Coro21: Les homographies sont des bijections bicontinues de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$

Exemple22: Avec $\mathbb{R}$ comme corps de base, on a de la même manière $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R} \sqcup \{\infty\}$
on peut représenter les restrictions à $\mathbb{R}^2$ des graphes des homographies
Dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})^2$, ces courbes sont des cercles ! *cf. Annexe E*

⚠ $\begin{cases} \mathbb{P}_1(\mathbb{R})^2 \simeq \mathbb{R}^2 \sqcup \{\infty\} \times \mathbb{R} \sqcup \mathbb{R} \times \{\infty\} \sqcup \{(\infty,\infty)\} \\ \mathbb{R}^2 \sqcup \mathbb{R} \sqcup \{\infty\} \simeq \cancel{\mathbb{P}_2(\mathbb{R})} \neq \cancel{\mathbb{P}_1(\mathbb{C})} \simeq \mathbb{C} \sqcup \{\infty\} \end{cases}$

Le comportement des homographies de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ est similaire à celui de $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$:
soit affine $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ prolongé par $f(\infty) = \infty$
soit un pôle simple en $-\frac{d}{c}$ et une limite uniforme $\frac{a}{c}$ en l'infini.

Thm23: L'ensemble des droites et cercles de $\mathbb{C}$ (donc les cercles de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$) est stable sous l'action des homographies.

3) Birapport

Thm24: L'action de $PGL_2(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ est 3-simplement transitive.
càd pour deux triplets (a_1,a_2,a_3) et (b_1,b_2,b_3) de $(\mathbb{P}_1(\mathbb{C}))^3$, il existe une unique homographie h telle que $h(a_1)=b_1$, $h(a_2)=b_2$ et $h(a_3)=b_3$
(avec $a_1 \neq a_2$, $a_2 \neq a_3$, $a_1 \neq a_3$, $b_1 \neq b_2$, $b_1 \neq b_3$ et $b_2 \neq b_3$)

Def25: Soient z_1, z_2, z_3 et $z_4 \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.
Il existe une unique homographie h envoyant $\begin{cases} z_1 \text{ sur} \\ z_2 \text{ sur} \\ z_3 \text{ sur} \end{cases}$
On définit le birapport de ces points par $[z_1,z_2,z_3,z_4] := h(z_4)$

Thm26: Le birapport est un invariant total pour l'action des homographies sur les quadruplets de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$
càd : pour (a_1,a_2,a_3,a_4), $(b_1,b_2,b_3,b_4) \in (\mathbb{P}_1(\mathbb{C}))^4$,
$[a_1,a_2,a_3,a_4] = [b_1,b_2,b_3,b_4]$ ssi $\exists h \in PGL_2(\mathbb{C}), \forall i \in \{1,..,4\}, h(a_i) = b_i$

Avec le thm 23, sachant que $0,1,\infty$ ne sont alignés qu'avec les réels, on déduit :

Thm27: Quatre points sont alignés ou cocycliques ssi leur birapport est réel.

Il ne reste plus qu'à trouver un moyen simple de calculer le birapport.

Prop28: Avec les conventions du thm20,
$$[z_1,z_2,z_3,z_4] = \frac{\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}}{\frac{z_1-z_4}{z_2-z_4}}$$

Exemple29:
* $[1,i,-1,-i] = \frac{2}{i+1} / \frac{i+1}{2i} = \frac{4i}{(1+i)^2} = 2$ donc ces points sont (alignés ou) cocycliques.

III Exemples d'applications de la géométrie projective

1) Théorème de l'application conforme

Def30: Une application du plan est dite conforme (resp. directe, resp. indirecte) si elle conserve les angles (resp. les angles orientés, resp. inverse les angles orientés).

Prop31: Une application conforme est soit directe, soit indirecte.

Exemples 32 :
* Les similitudes planes sont conformes
* $z \mapsto \frac{1}{z}$ est conforme directe
* $z \mapsto \overline{z}$ est conforme indirecte.

Thm33: Les applications conformes directes de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ sont exactement les homographies

Rq34: Si f est conforme indirecte, alors $z \mapsto \overline{f(z)}$ est directe.

Rq35: Les applications de 14-15 et de 16-17 dans le II 2) conservent les angles, il y a donc cohérence à parler d'angles dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$

2| Groupe circulaire [Audin] VI-7-11 (p 204)

Def 36: Le groupe circulaire de $\mathbb{C}$ est le groupe engendré par les homographies et la conjugaison complexe.

Le théorème suivant donne alors une sorte de réciproque au Thm 23:

Thm 37: Le groupe circulaire est exactement l'ensemble des applications conservant les droites et cercles de $\mathbb{C}$ $\boxed{\text{DEV}}$

Avec le Thm 33 vient alors le résultat géométrique suivant:

Coro 38: Une application du plan conserve les angles ssi elle conserve l'ensemble des droites et des cercles.

3| Théorème de Ptolémée

À l'aide du puissant outil qu'est le birapport, on démontre simplement le résultat ancestral suivant:

Thm 39 [de Ptolémée]:
Soit ABCD un quadrilatère. Il existe un cercle circonscrit au quadrilatère ssi le produit de ses diagonales est égal à la somme des produits de ses côtés opposés

Rq 40: Dans le cas où ABCD est un rectangle, cela nous donne le théorème de Pythagore.

IV Quaternions et applications en géométrie dans l'espace [Per] ch VII [RR99] ch VII

Le fait que $\mathbb{C}$ soit un corps et un $\mathbb{R}$-ev de dimension 2 nous donne de puissants outils pour la géométrie planaire. Malheureusement, ces outils sont inutiles en géométrie dans l'espace.

1| Définition

Def 41: Soit $\mathbb{H}$ la $\mathbb{R}$-algèbre de dimension 4 engendrée par $1, i, j, k$ en tant qu'espace vectoriel; avec $i^2=j^2=k^2=ijk=-1$.
$\mathbb{H}$ est appelée algèbre des quaternions, c'est une algèbre à divisions (corps non commutatif)

Def 42: Si $h = a+bi+cj+dk$, $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, on appelle $N(h)=a^2+b^2+c^2+d^2$ la norme de h, et $\bar{h} = a-bi-cj-dk$ le conjugué de h

Rq 43: $N(hh')=N(h)N(h')$ et $N(h)=h\bar{h}=\bar{h}h$.

Rq 44: Réalisation matricielle:
$\mathbb{C}$ peut être vu comme un sous-ensemble de $GL_2(\mathbb{R})$, avec
$1_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et $i_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$
De la même manière, $\mathbb{H}$ peut se construire comme sous-ensemble de $GL_2(\mathbb{C})$ (ou de $GL_4(\mathbb{R})$), avec $1_{\mathbb{H}}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $i_{\mathbb{H}}=\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}$, $j_{\mathbb{H}}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ et $k_{\mathbb{H}}=\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}$

2| Utilisation de $\mathbb{H}$ en géométrie

Rappel 45: $SU_2(\mathbb{C}) = \left\{\begin{pmatrix}a&-\bar{b}\\b&\bar{a}\end{pmatrix} / |a^2|+|b^2|=1\right\}$

Prop 46: $SU_2(\mathbb{C})$ est isomorphe à l'ensemble des quaternions de norme 1

* En dimension 3:

Prop 47: $SU_2(\mathbb{C})$ agit sur $\mathbb{H}$ par conjugaison, et stabilise l'ensemble des imaginaires purs de $\mathbb{H}$

Thm 48: $SU_2(\mathbb{C})/\{I_2,-I_2\} \simeq \underbrace{SO_3(\mathbb{R})}_{\text{ensemble des rotations de } \mathbb{R}^3}$

Cela fournit un moyen peu coûteux de composer des rotations, et est très utilisé, notamment dans la programmation de jeux vidéos.

* En dimension 4:

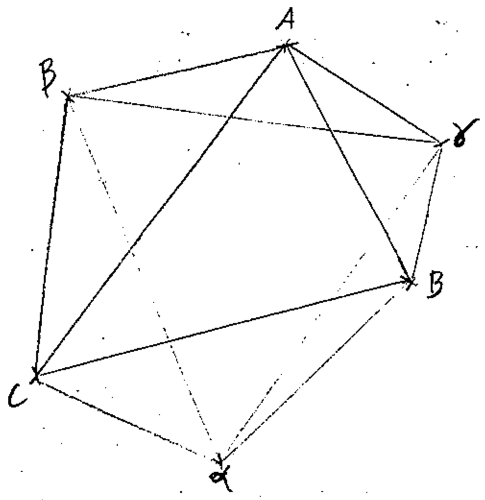
On fait agir $SU_2(\mathbb{C})\times SU_2(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{H}$ par $((h,k),v) \longmapsto \tilde{h} v \tilde{k}^{-1}$
quaternions associés à h et k par 46

Thm 49:
* $(SU_2(\mathbb{C}))^2/\{(I_2,I_2),(-I_2,-I_2)\} \simeq SO_4(\mathbb{R}) \to$ "rotations" de $\mathbb{R}^4$ (isométries directes).
* $\left(SU_2(\mathbb{C})/\{(I_2,-I_2)\}\right)^2 \simeq PSO_4(\mathbb{R})$

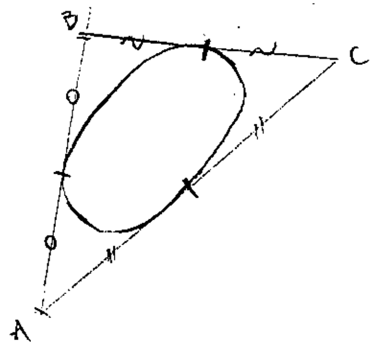
[RR99]: P. Caldero; J. Germoni; Histoires hédonistes de groupes et de géométries, tome 1 (Calvage & Mounet)
[Per]: D. Perrin; Cours d'algèbre (ellipses)
[Hahn]: L-S. Hahn; Complex numbers and geometry (Mathematical association of America)
[Arez]: A. Arez; La leçon de géométrie à l'oral de l'agrégation (Masson)
[Eiden]: J-D. Eiden; Géométrie analytique classique (C&M)
[Tissier]: A. Tissier; Mathématiques générales (Bréal)
[Tisseron]: C. Tisseron: Géométrie affine, projective et euclidienne (Hermann)
[Audin]: M. Audin; Géométrie (EDP Sciences)

Autre dev possible:
Action du groupe modulaire sur le demi-plan de Poincaré p81
cf. M. Alessandrini Thèmes de géométrie, groupes en situation géométrique (Dunod)

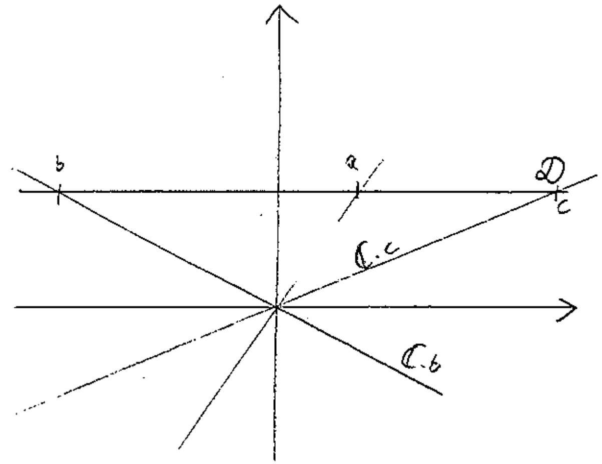
Annexe A : Configuration de Napoléon



Annexe B : Ellipse de Steiner :

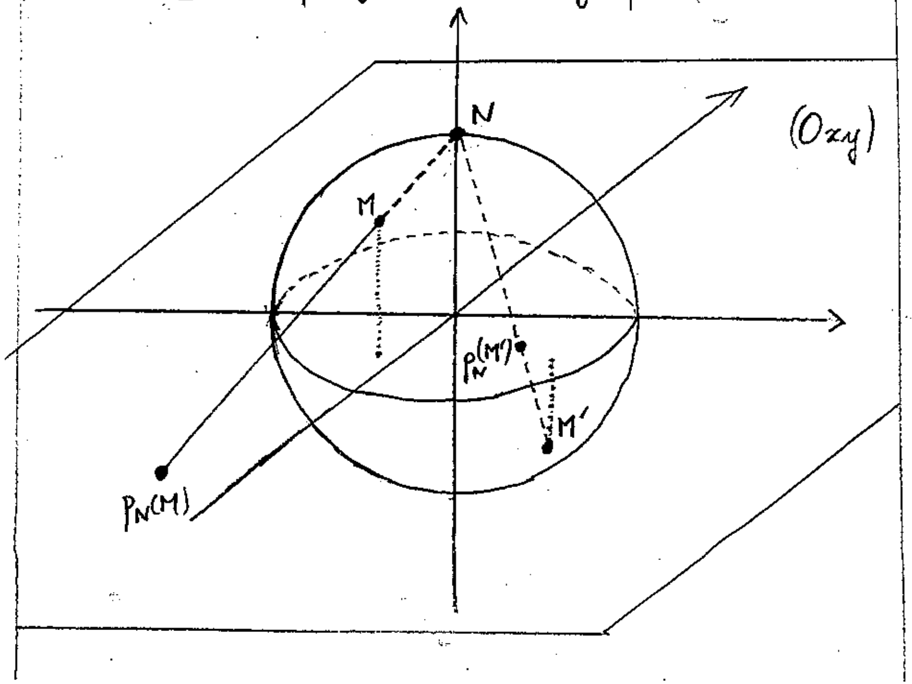


Annexe C : $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \approx \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$



$a, b, c \in \mathbb{C}^4$

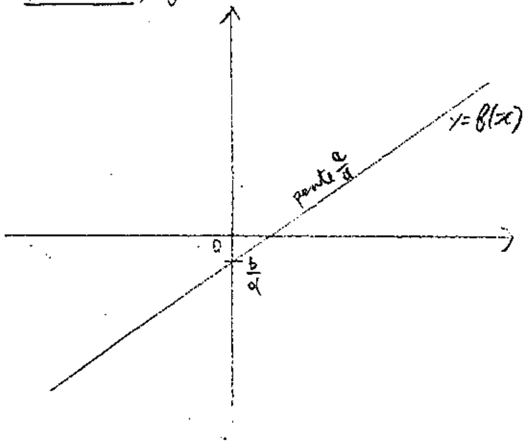
Annexe D : La projection stéréographique :



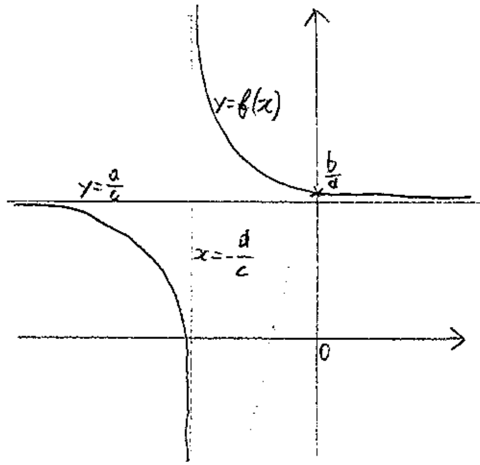
Annexe E : Les homographies réelles : $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$$f : \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$$
$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

* si $c = 0$, $f(\infty) = \infty$



* si $c \neq 0$:



[Audin], p. 204

Groupe circulaire

Soit G le groupe engendré par les homographies et la conjugaison complexe, X l'ensemble des droites et cercles de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, $Q = \{\varphi : \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ bijective $/ \varphi(X) \subseteq X\}$

Thm : $G = Q$

Dém du $\subseteq$: On sait que les homographies préservent X, et la conjugaison est une symétrie, donc $\mathrm{conj}_{\mathbb{C}}(X) \subseteq X$.
Donc, $G \subseteq Q$.

Pour le $\supseteq$, on va passer par plusieurs lemmes :

Lemme 0 : $\forall a, b, c \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, on a : $[a, b, c, \infty] = [b, a, \infty, c]$.
De plus $[a, b, c, \infty] = -1$ ssi $c = \frac{a+b}{2}$.

Dém : On développe le birapport et le reste suit immédiatement.

Déf : (a, b, c, d) est une division harmonique si $[a, b, c, d] = -1$.

Lemme ① : Si $f : \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ est une bijection préservant les divisions harmoniques et telle que $f(0)=0$, $f(1)=1$ et $f(\infty)=\infty$, alors $f|_{\mathbb{C}} = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ ou $\mathrm{conj}_{\mathbb{C}}$.

Lemme ② : Si $\varphi \in Q$, alors φ préserve les div. harmoniques.

Pour démontrer le théorème et le lemme ②, remarquons que si h est une homographie, et $\varphi \in Q$, alors $\varphi \in G \Leftrightarrow h \circ \varphi \in G$.
Donc, par 3-transitivité de $PGL_2(\mathbb{C}) \curvearrowright \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, on peut supposer que $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$ et $\varphi(\infty) = \infty$, et c'est ce que nous ferons.

Dém du $\supseteq$: Soit $\varphi \in Q$, et supposons $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=1$ et $\varphi(\infty)=\infty$.
Alors, d'après ②, φ préserve les div. harm., donc d'après ①,

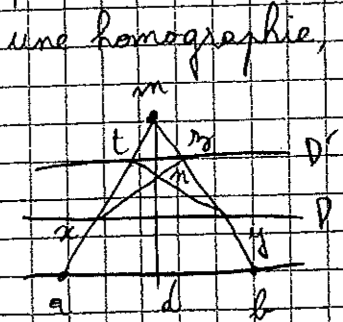
$\varphi|_{\mathbb{C}} = id_{\mathbb{C}}$ ou $conj_{\mathbb{C}}$, donc $\varphi \in G$, ce qui conclut la démonstration.

Passons à la démonstration des lemmes :

Dém ①: On va dém que $f|_{\mathbb{C}}$ est un autom. de corps fixant $\mathbb{R}$, donc nécessairement $id_{\mathbb{C}}$ ou $conj_{\mathbb{C}}$.

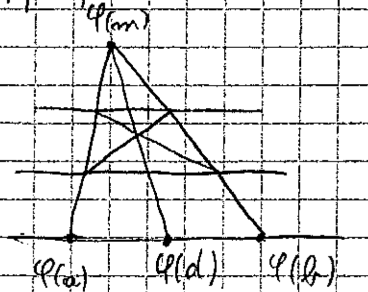
* f additive : D'après le lemme 0, $\forall a, b$, $[a, b, \frac{a+b}{2}, \infty] = -1$. Donc, en appliquant f : $[f(a), f(b), f(\frac{a+b}{2}), \infty] = -1$, et d'après le lemme 0, $f(\frac{a+b}{2}) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$. En particulier, si $b = 0$, $f(\frac{a}{2}) = \frac{f(a)}{2}$, d'où $f(a+b) = f(a) + f(b)$.
* f multiplicative : $\forall x \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, on a $[x, -x, x^2, 1] = -1$ (en développant le birapport). Donc, en prenant $x = f(a)$, on a $[f(a), -f(a), f(a)^2, 1] = -1$, et en prenant $x = a$ et en appliquant f, on a $[f(a), f(-a), f(a^2), 1] = -1$. Or, $f(-a) = -f(a)$, et par unicité du birapport, $f(a)^2 = f(a^2)$. Finalement, $ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$, et d'après ce qui précède, $f(ab) = \left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)^2 - \left(\frac{f(a)-f(b)}{2}\right)^2 = f(a)f(b)$.
* Donc $f|_{\mathbb{C}} \in Aut(\mathbb{C})$, $f|_{\mathbb{C}}$ fixe $\mathbb{R}$, donc $f|_{\mathbb{C}} = id_{\mathbb{C}}$ ou $conj_{\mathbb{C}}$.

Dém du ②: Soit $\varphi \in Q$, et supposons $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$ et $\varphi(\infty) = \infty$. Soient $a, b, c \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, et construisons d tel que $[a, b, c, d] = -1$ (d est unique). Quitte à appliquer une homographie, on peut supposer $c = \infty$.



Soit m tel que $a b m$ est équilat. Soient D, D' deux droites parallèles à (ab) passant par $a b m$, et soient x, y, z, t les points d'intersection

Soit n l'intersection des diagonales de $xyzt$, et soit d l'intersection de (mn) et (ab). Comme abm est équilatéral, $d = \frac{a+b}{2}$, et d'après le lemme 0, $[a, b, \infty, d] = -1$.
Appliquons alors φ à la figure :



$\varphi(m)$ est extérieur à $\varphi(a)\varphi(b)$ puisque φ conserve l'alignement, et (xy) et (zt), qui intersectent (ab) à l'∞, sont envoyées sur des droites intersectant $(\varphi(a)\varphi(b))$ à l'∞, donc parallèles, ce qui explique la figure ci-dessus.

On veut montrer que $\varphi(d) = \frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}$. Soit $u \in Aff(\mathbb{R}^2)$ envoyant $\varphi(a)\varphi(b)\varphi(m)$ sur un triangle équilatéral. Comme u préserve les milieux et les parallèles, on arrive dans la situation du dessin précédent, donc $u\varphi(d) = \frac{u\varphi(a) + u\varphi(b)}{2}$, d'où $\varphi(d) = \frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}$, et φ préserve donc les divisions harmoniques.