Application des nombres complexes à la géométrie

182

I - Géométrie euclidienne du plan

1- Passage de $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$

Th 1 : Soit P le plan affine euclidien doté d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. L'application $\mathbb{C} \longrightarrow P$, $z_M = x+iy \mapsto M(z)=(x,y)$ est une bijection.
Elle permet d'identifier le plan P et le corps $\mathbb{C}$.

Déf 2 : $z_M = x+iy$ est l'affixe du point $M=(x,y)$

Prop 3 : $|z_M| = \|\vec{OM}\|$. $\arg(z) \equiv (\vec{i},\vec{OM})\ [2\pi]$

Prop 4 : Soient M_1, M_2 deux points. On a :
(i) $\vec{OM_1}\cdot\vec{OM_2} = \frac{1}{2}(z_1\bar{z_2}+\bar{z_1}z_2)$
(ii) $\vec{OM_1}, \vec{OM_2}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow z_1\bar{z_2} = \bar{z_1}z_2$
(iii) $\vec{OM_1}, \vec{OM_2}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow z_1\bar{z_2}+\bar{z_1}z_2 = 0$

Prop 5 : Équation d'une droite. (D) la droite passant par A et B a pour équation : $z = a+\lambda(b-a)$, $\lambda\in\mathbb{R}$

Prop 6 : A_1, A_2, A_3 des points d'affixes z_1, z_2, z_3.
A_1, A_2, A_3 sont alignés $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \bar{z_1} & \bar{z_2} & \bar{z_3} \end{vmatrix} = 0$

~~Prop 7 : M_0, M_1, M_2, M_3 des points.~~
~~Ils sont cocycliques~~ ou alignés $\Leftrightarrow$ $\cancel{\frac{z_0-z_2}{z_0-z_3}} : \frac{z_1-z_3}{z_1-z_2} \in \mathbb{R}$

Prop 8 : L'équation du cercle de centre A de rayon r est $|z-a|=r$

2- Transformations du plan

P le plan affine euclidien.

Prop 9 : Rotation d'angle θ $\Leftrightarrow$ multiplication par $e^{i\theta}$
Symétrie // axe des abscisses $\Leftrightarrow$ Conjugaison complexe
Symétrie // une droite passant par O faisant un angle θ avec l'axe des abscisses $\Leftrightarrow z' = e^{2i\theta}\bar{z}$
Homothétie de rapport λ $\Leftrightarrow$ multiplication par λ

3- Barycentres et suites barypolygonales

Th 10. Soient $A_1,\dots,A_n$ des points d'affixes $a_1,\dots,a_n$.
L'isobarycentre des $A_1,\dots,A_n$ est le point d'affixe $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$
Les points d'affixe $\sum_{k=1}^{n} t_k a_k$, où $0\le t_k$, $\sum_{k=1}^{n} t_k = 1$, sont les barycentres des $A_1,\dots,A_n$.

Ex 11 : Le milieu d'un segment $[A,B]$ a pour affixe $\frac{z_A+z_B}{2}$

Déf 12 : Un n-gone, ou polygone à n côtés du plan, $n\geq 2$, est la donnée de n points du plan, ordonnés.
De manière équivalente, c'est un vecteur de $\mathbb{C}^n$.

Déf 13 : Une suite barypolygonale est une suite de polygones $(A_1^{(k)},\dots,A_n^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence, avec $A_r^{(k+1)}$ qui est barycentre de $A_r^{(k)}$ et $A_{r+1}^{(k)}$ avec poids respectifs $(t_k, 1-t_k)$, pour $1\le r\le n-1$,
et $A_n^{(k+1)}$ qui est barycentre de $A_n^{(k)}$ et $A_1^{(k)}$ avec poids respectifs $(t_k, 1-t_k)$, où $(t_k)\in]0,1[^{\mathbb{N}}$

Th 14 : Si $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est constante (Olivier)
ou si (t_k) admet une valeur d'adhérence autre que 0 et 1 (Mari)
Alors toute suite barypolygonale converge vers l'isobarycentre du polygone original.

DEV1

Th 15 : On a encore convergence vers l'isobarycentre quand :
(i) $t_k \longrightarrow 0$ et $\sum t_k$ DV
ou (ii) $t_k \longrightarrow 1$ et $\sum (1-t_k)$ DV

Rem 16 : Si $0 < \inf t_k \le \sup t_k < 1$, alors la convergence est géométrique (au sens de l'aire de l'enveloppe convexe)

Rem 17 : Si $t_k \to 0$ avec $\sum t_k$ CV, alors les suites barypolygonales peuvent diverger.

4 - Triangles

P le plan affine euclidien.

Th 18 : A, B, C trois points. On prend pour origine O le milieu de $[BC]$. L'axe (Ox) est porté par la droite (BC).

ABC est isocèle en $A \iff z + \bar{z} = 0$

ABC est rectangle en $A \iff z\bar{z} = b^2$

Th 19 : A, B, C trois points. $j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$

ABC est équilatéral $\iff a + bj + cj^2 = 0$ ou $a + bj^2 + cj = 0$

Appli 20 : Le triangle de sommets i, z, iz est équilatéral $\iff z = \frac{(-1 \pm \sqrt{3})(1+i)}{2}$

Th 21 : ABC un triangle. Il existe une unique ellipse, appelée ellipse de Steiner, qui est tangente aux côtés du triangle en leur milieu. De plus l'affixe des foyers sont les racines de la dérivée de $(X-a)(X-b)(X-c)$.

II - Inversions

1- Inversions analytiques et géométriques

Déf 22 : Soit $a \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{R}^*$.

(i) L'inversion analytique de pôle a et de rapport k est $z \mapsto a + \frac{k}{z-a}$

(ii) L'inversion géométrique de pôle a et de rapport k est $z \mapsto a + \frac{k}{\overline{z-a}}$

Prop 23 : L'ensemble des points fixes d'une inversion géométrique est :

(i) vide si $k < 0$

(ii) le cercle de centre a et de rayon $\sqrt{k}$ si $k > 0$

Prop 24 : L'image d'un cercle ou d'une droite par une inversion géométrique est un cercle ou une droite.

2 - Applications

Déf 25 : Soient A, B, C distincts, D un point. Le birapport de A, B, C, D, noté $[a, b, c, d]$, est $\frac{d-b}{d-a} \Big/ \frac{c-b}{c-a} \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Th 26 : (Ptolémée) $ABCD$ un quadrilatère convexe.

$ABCD$ sont cocycliques $\iff AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC$

Prop 27 : A, B, C, D quatre points avec A, B, C distincts.

A, B, C, D sont cocycliques $\iff$ leur birapport est réel non nul

A, B, C, D sont alignés $\iff$ leur birapport est nul.

III - Homographies

1- Définitions et structure

Déf 28 : $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ est la droite projective complexe.

$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ s'identifie avec les droites vectorielles de $\mathbb{C}^2$.

Déf 29 : $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ avec $ad - bc \neq 0$.

Une homographie est une application $h : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$

Prop 30 : L'ensemble des homographies est un groupe pour la composition.

$GL(2,\mathbb{C}) / \mathbb{C}^* I_2 \xrightarrow{\sim} \{\text{homographies}\}$ est un isomorphisme de groupes

$\mathbb{C}^* \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \left(h : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}\right)$

ces deux groupes seront notés $PGL(2,\mathbb{C})$.

2- Applications géométriques

Prop 31 : L'ensemble des similitudes directes est l'ensemble des homographies laissant ∞ fixe.

Prop 32 : Une homographie est entièrement déterminée par sa valeur en 3 points distincts.

Prop 33 : Le birapport est inchangé par homographie.

Lemme 34 : Soient deux cercles dont l'un est inclus dans l'autre. Il existe une homographie qui les transforment en 2 cercles concentriques.

Th 35 : (Porisme de Steiner) Soit C' un cercle inclus dans C un cercle. $n \geq 3$. C_1, D_1, des cercles tangents à C et C'.

Il existe des cercles $C_2, \dots, C_n$ tangents à C, C', C_{i+1} tangent à C_i, C_n tangent à C_1 $\iff$ Il existe des cercles $D_2, \dots, D_n$ tangents à C, C', D_{i+1} tangent à D_i, D_n tangent à D_1

3 - Suites récurrentes homographiques

Rem 36 : Pour h une homographie, il existe deux matrices M et $-M$ dans $SL(2,\mathbb{C})$, qui représentent h.
On définit en conséquence $\mathrm{tr}^2 h = \mathrm{tr}(M)^2 = \mathrm{tr}(-M)^2$.

Th 37 : Une homographie h admet 1 ou 2 points fixes.
On les note ξ ou ξ_- et ξ_+. On posera $F : z \mapsto \frac{1}{z-\xi}$ ou $\frac{z-\xi_+}{z-\xi_-}$

(i) Si $\mathrm{tr}^2 h \in [0,4[$, h a deux points fixes, et $F \circ h \circ F^{-1}$ est une rotation
(ii) Si $\mathrm{tr}^2 h = 4$, h a un pt fixe, et $F \circ h \circ F^{-1}$ est une translation
(iii) Si $\mathrm{tr}^2 h \in]4,+\infty[$, h a 2 pts fixes, et $F \circ h \circ F^{-1}$ est une homothétie
(iv) Sinon, h a 2 pts fixes, et $\exists \rho \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{U} \cup \mathbb{R})$, $F \circ h \circ F^{-1} = \rho\, \mathrm{id}$

Appli 38 : Une suite récurrente homographique est une suite (z_n) vérifiant la relation $z_{n+1} = h(z_n)$.
La classification des homographies permet d'étudier la convergence des suites récurrentes homographiques.

Ex 39 : Pour $z_0 \neq \frac{1-\sqrt{13}}{2}$, la suite (z_n) définie par $z_{n+1} = \frac{5z_n+3}{z_n+4}$ converge vers $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$

IV - Au delà des complexes

1 - Les quaternions

Th-déf 40 : L'ensemble $\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C} \right\}$
est une $\mathbb{R}$-algèbre (unitaire, associative), non commutative, de dimension 4, qui est de plus un corps.
On l'appelle algèbre (ou corps) des quaternions.
Les matrices suivantes, dites de Pauli, constituent une $\mathbb{R}$-base :
$\tilde{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $\tilde{j} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$
L'ensemble $\mathbb{I} = \mathrm{vect}_{\mathbb{R}}(\tilde{i}, \tilde{j}, \tilde{k})$ est appelé ensemble des quaternions imaginaires purs.

Appli 41 : La sphère $\mathbb{S}^3$ est un groupe topologique.

Lemme 41 : Les retournements de $\mathbb{R}^3$ engendrent $SO(3)$.

DEV 2

Th 42 : Il existe un morphisme de groupes topologiques, continu : $\varphi : SU(2) \longrightarrow SO(3)$, de noyau $\{\pm I_2\}$, surjectif.

Cor 43 : (i) $SU(2)/\{\pm I_2\} \underset{\text{groupe}}{\simeq} SO(3)$
(ii) $SO(3)$ est connexe par arcs

Rmq 44 : La rotation d'angle θ d'axe porté par (x,y,z) unitaire est réalisée par le quaternion $\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} + ix\sin\frac{\theta}{2} & -y\sin\frac{\theta}{2} + iz\sin\frac{\theta}{2} \\ y\sin\frac{\theta}{2} + iz\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} - ix\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$

Ex 45 : Avec $\theta = 120°$, $(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ on trouve : $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{i}{2} & -\frac{1}{2}+\frac{i}{2} \\ \frac{1}{2}+\frac{i}{2} & \frac{1}{2}-\frac{i}{2} \end{pmatrix}$

Rmq 46 : (Frobenius)
Les $\mathbb{R}$-algèbres (unitaires, associatives) intègres de dimension finie sont à isomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres près : $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$.

2 - Encore plus loin !

Th 47 : (Frobenius et Cayley) (admis pour l'unicité)
Il existe une unique $\mathbb{R}$-algèbre unitaire, non associative, intègre, de dimension finie.
On la note $\mathbb{O}$, c'est l'algèbre des octonions de Cayley, elle est de dimension 8 sur $\mathbb{R}$.

Appli 48 : La sphère $\mathbb{S}^7$ possède une structure de quasi-groupe (un groupe non associatif) topologique.

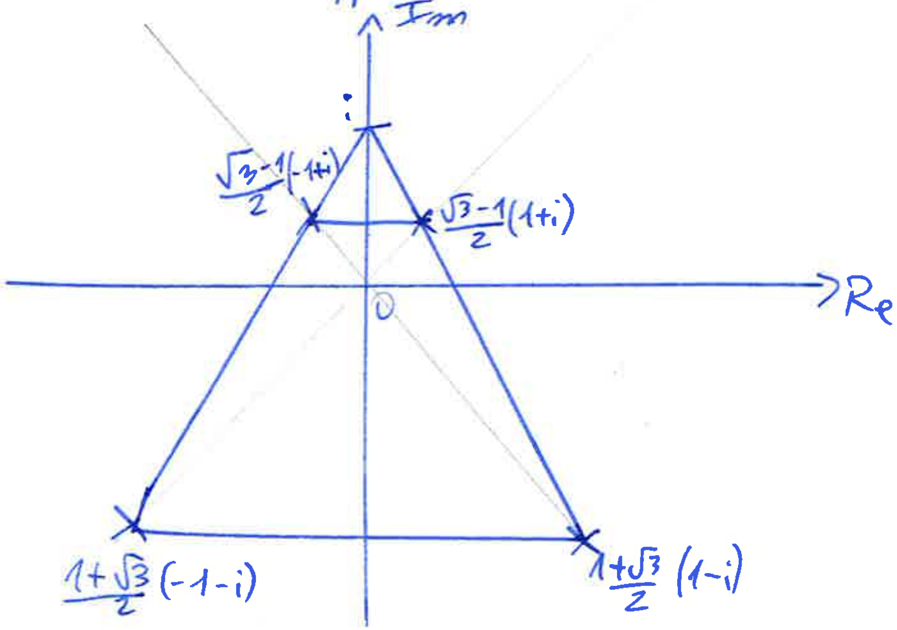
Références :

- NH2G2 tome 2 (dév 2)
- Quadrature 100, 102, 105 (inspiration pour le dév 1)
- Trignon : La géométrie des nombres complexes
- Eiden : Géométrie analytique classique

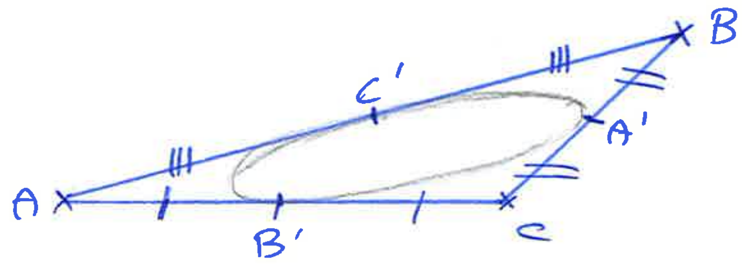
Autres possibilités :

- Fibration de Hopf
- Porisme de Poncelet

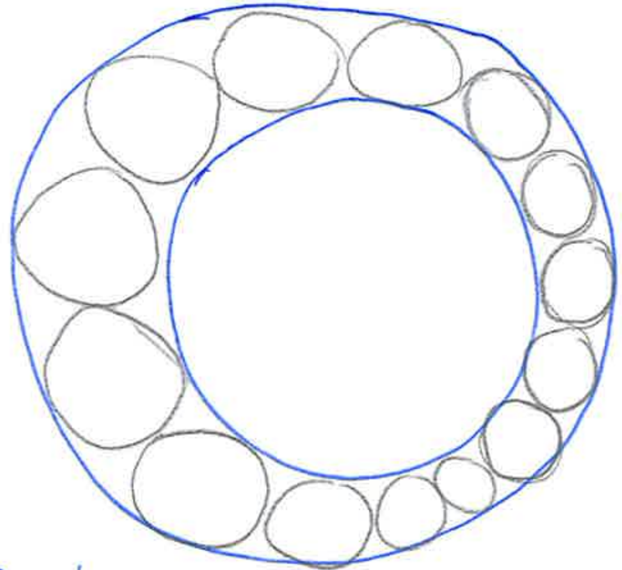
Annexe 1 : (Application 20)



Annexe 2 : Ellipse de Steiner



Annexe 3 : Porisme de Steiner



La fermeture ou non de la chaîne de cercle est indépendante du cercle de départ.