141. Utilisation des groupes en géométrie.

I Géométrie affine.

Def : On appelle espace affine associé à l'ev E tout ensemble $\mathcal{E}$ sur lequel $(E,+)$ opère simplement transitivement.

Conséquences : $\forall x,y \in \mathcal{E}, \exists ! \vec{u} \in E / x+\vec{u} = y$, noté $\overrightarrow{xy}$.
$\forall x \in \mathcal{E}$ et $\forall \vec{u} \in E, \exists ! y \in \mathcal{E} / \overrightarrow{xy} = \vec{u}$
$\forall y \in \mathcal{E}$ et $\forall \vec{u} \in E, \exists ! x \in \mathcal{E} / \overrightarrow{xy} = \vec{u}$.

Def : $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ est affine si $\exists a \in \mathcal{E} / f_a : \vec{u} \mapsto \overrightarrow{f(a) f(a+\vec{u})} \in \mathcal{L}(E,E')$
Alors $\forall a \in \mathcal{E}$ $f_a = f_b = \vec{f}$ est la partie linéaire de f,
et $f(y) = f(x) + \vec{f}(\overrightarrow{xy})$ $\forall x, y \in \mathcal{E}$.

Def : On appelle groupe affine l'ensemble des applications affines bijectives de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$. On le note $GA(\mathcal{E})$.
$L : GA(\mathcal{E}) \to GL(E)$ est un morphisme de groupes surjectif de
$f \longmapsto \vec{f}$ noyau $T(\mathcal{E})$ (ensemble des translations).

Prop : $GA(\mathcal{E})$ est produit semi-direct de $T(\mathcal{E})$ et $GA_a(\mathcal{E})$, $\forall a \in \mathcal{E}$.
où $GA_a(\mathcal{E})$ est le stabilisateur en a pour l'action de $GA(\mathcal{E})$ sur $\mathcal{E}$.

Application : Théorème de Thalès.
Soient H, H', H'' des hyperplans parallèles, $(D_i)_{i \in I}$ une famille de droites dont aucune n'est faiblement parallèle à H et $d_i = H \cap D_i$, $d_i' = H' \cap D_i$, $d_i'' = H'' \cap D_i$.
Alors $\dfrac{\overline{d_i d_i''}}{\overline{d_i d_i'}}$ est indépendant de i.

II Géométrie Euclidienne

1) Isométries vectorielles :

Def : une isométrie de E (euclidien) est une application f qui conserve le produit scalaire, ce qui équivaut à $f \in \mathcal{L}(E)$ et f conserve la norme. Toute isométrie est bijective.

Théorème : toute isométrie est produit d'au plus n réflexions.
Théorème : Si $f \in O(E)$, $\exists \beta$ bon de E / $\mathrm{Mat}_\beta(f) = \begin{bmatrix} R_{\theta_1} & & & & & (0) \\ & \ddots & & & & \\ & & R_{\theta_r} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & -1 & \\ (0) & & & & & \ddots \end{bmatrix}$
avec $R_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$.

2) Angles. (E euclidien de dim 2).

Prop : $O^+(E)$ est simplement transitif sur $\tilde{\mathcal{D}}(E)$ (l'ensemble des demi droites).
Def : l'ensemble des angles orientés de demi droites $\tilde{\mathcal{A}}(E)$ est l'ensemble des orbites de l'action de $O^+(E)$ sur $\tilde{\mathcal{D}}(E)^2$.

Prop : $\tilde{\mathcal{A}}(E)$ est en bijection avec $O^+(E)$.
Conséquence : on peut transporter la structure de $O^+(E)$ sur $\tilde{\mathcal{A}}(E)$. On obtient ainsi la relation de Chasles sur les angles orientés.

3) Isométries affines

Def : $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est une isométrie si elle conserve la norme.
On note $Is(\mathcal{E})$ l'ensemble des isométries de $\mathcal{E}$.

Prop : $Is(\mathcal{E})$ est un sous groupe de $GA(\mathcal{E})$ et $f \in GA(\mathcal{E})$ est une isométrie si $\vec{f} \in O(E)$.

Prop : $Is(\mathcal{E})$ est engendré par les réflexions

Isométries en dim 2 :
$Is^+(\mathcal{E}) = \{Id$, rotations $\neq Id$, translations $\neq Id\}$
$Is^-(\mathcal{E}) = \{$réflexions, symétries glissées$\}$

183

Isométries en dim 3 :

$Is^+(E) = \{Id, \text{translations} \neq Id, \text{rotations} \neq Id, \text{vissages}\}$

$Is^-(E) = \{\text{réflexions, symétries glissées, réflexions rotations}\}$

Application : concours des hauteurs du triangle.

4) Similitudes.

Def : ce sont les applications linéaires qui préservent les rapports de norme. On note $GO(E)$ l'ensemble des similitudes. C'est un sous groupe de $GL(E)$ contenant $O(E)$.

Prop : f est une similitude si f conserve l'orthogonalité.

Similitudes affines.

Def : f est une similitude si elle préserve les rapports de distances.

Prop : Soit f une bijection de $E \to E$ où E est de dim ≥ 2.
f similitude $\Leftrightarrow$ f conserve l'orthogonalité $\Leftrightarrow$ $\forall S$ sphère $f(S)$ est une sphère.

III Géométrie projective

Def : $g : P(E) \to P(E')$ est une homographie si $\exists f : E \to E'$ isomorphisme tq $p' \circ f = g \circ p$ où $p : E \setminus \{0\} \to P(E)$ et $p' : E' \setminus \{0\} \to P(E')$ sont les projections canoniques.

Prop : l'ensemble des homographies est un groupe, noté $PGL(E)$, isomorphe à $GL(E)/\text{homothéties}$.

Droite projective complexe $P^1(\mathbb{C})$.

Prop : $\exists ! h \in PGL_2(\mathbb{C})$ qui envoie 3 pts distincts sur 3 pts distincts

Def : On appelle birapport de a, b, c, d l'image de d par l'unique homographie qui envoie a sur ∞, b sur 0, c sur 1. On le note $[a,b,c,d]$.

On a $[a,b,c,d] = \dfrac{z_d - z_b}{z_d - z_a} \Big/ \dfrac{z_c - z_b}{z_c - z_a}$

Prop : 4 pts sont alignés ou cocycliques si leur birapport est réel.

Prop : toute homographie transforme un cercle ou droite en un cercle ou droite.

Application : alternative de Steiner :
soient C, C' deux cercles, C intérieur à C' et Γ_1 un cercle tangent à C et C', extérieur à C. On construit une chaîne de cercles Γ_i tq Γ_{i+1} soit tangent à C, C', Γ_i et différent de Γ_{i-1}. Alors soit $\forall i > 1, \Gamma_i \neq \Gamma_1$, soit $\exists n$ tq $\Gamma_n = \Gamma_1$, et alors $\forall \Gamma_1'$ tangent à C, C' extérieur à C, on aura $\Gamma_n' = \Gamma_1$.

Groupe circulaire.

Def : le groupe circulaire est le groupe engendré par les homographies et $z \mapsto \bar{z}$.

Prop : les éléments du groupe circulaire sont les transformations qui préservent les cercles ou droites.

IV Application à des problèmes de classification.

1) Classification des coniques.

On cherche à déterminer les orbites de l'action de divers groupes de transformation sur l'ensemble Γ des coniques. On obtient de plus en plus d'orbites lorsqu'on restreint le groupe de transformation de la géométrie.

2) Isométries préservant un polygone régulier

Def: Le groupe diédral est l'ensemble des isométries laissant invariant un polygone régulier à n côtés. On le note D_n.

Prop: D_n est un groupe d'ordre $2n$ engendré par la rotation r d'angle $\frac{2\pi}{n}$ et de centre celui du polygone, et la symétrie s de droite $\langle OA_1\rangle$

3) Polyèdres réguliers.

Théorème: il y a 5 types de polyèdres réguliers: le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'isocaèdre.

Théorème: Le groupe des isométries positives du tétraèdre est isomorphe à A_4. Celui du cube et de l'octaèdre à S_4 le groupe du dodécaèdre et de l'isocaèdre à A_5.
[DVP n°1 : le groupe du cube].

4) Pavage du plan. (E plan euclidien).

Def: Soit P un compact connexe d'intérieur non vide, G un sous groupe de $\underset{o}{Is}^{+}(E)$ tel que
$\bigcup_{g\in G} g(P)=E$ et $g(\mathring{P}) \cap h(\mathring{P}) \neq \emptyset \Rightarrow g(P)=h(P)$
est appellé groupe de pavage

Théorème: Il existe, à conjugaison près dans $GA(E)$ que 5 groupes de pavages.
[DVP n°2]

Remarque: si on remplace $Is^{+}(E)$ par $Is(E)$ dans la définition, on trouve 17 groupes.

Références :

- Audin, géométrie
- Berger, Géométrie T1.
- Alessandri thèmes de géométrie (Iso. du cube)
- Ladegaillerie Géométrie ...
- Caldero Thèmes de géométrie (Pavages)
- Mérindol ... (pour demi-plan de Poincaré si ça vous interesse)

Autres idées :

- classification des coniques sur $\mathbb{R}$
  modulo
  - les transf. projectives $\to$ 1 conique : ellipse = hyperbole = parabole cf $\mathbb{C}$
  - les transf. affines $\to$ 3 classes non vides
  - les isométries $\to$ grand axe, petit axe

- exos de géométrie (Audin)
- Banach-Tarski
- quaternions
- géométrie projective
- géométrie hyperbolique : $SL_2(\mathbb{Z}) \curvearrowright$ ½ plan de Poincaré
- alg linéaire : signature / det / volume / orientation
  - thm de Witt
- utilisation des générateurs
- construction de groupes finis via les polyèdres réguliers