

I Géométries affines et euclidiennes [SFP]

1) Géométrie affine

[Com]

Def 1: Un espace affine est un ensemble E sur lequel le groupe $(\vec{E}, +)$ d'un espace vectoriel agit librement transitivement

Exemple 2: Un espace vectoriel E agit sur lui-même (Espace affine canonique sur E)

On se place maintenant sur un espace affine E de direction \vec{E} .

Def-prop 3: Une application $f: E \rightarrow E$ est dite affine si il existe $\vec{f} \in \mathcal{L}(\vec{E})$ tel que

$$\forall N, M \in E, \vec{f}(M) - \vec{f}(N) = \vec{f}(\vec{MN})$$

L'ensemble des bijections affines de E est un sous groupe de $\mathcal{G}(E)$ noté $GA(E)$.

Exemple 4: $t_{\vec{u}}(A) = A + \vec{u}$. $T(E) := \{ \text{translations de } E \}$

• Homothéties $h_{\Omega, \lambda}(A) = \Omega + \lambda \vec{OA}$

Prop 5: Si $f \in GA(E)$ et $\vec{u} \in \vec{E}$, $f \circ t_{\vec{u}} \circ f^{-1} = t_{\vec{f}(\vec{u})}$

Théorème 6: • $\Phi: (GA(E) \rightarrow GL(\vec{E}))$ est un

morphisme surjectif de noyau $T(E) \triangleleft GA(E)$.

• Un point o étant fixe, l'ensemble $GA_o(E)$ des transformations affines admettant o comme point fixe est un sous groupe de $GA(E)$ et $\Phi|_{GA_o(E)}$ est un isomorphisme.

• Si $f \in GA(E)$, $\exists! (t_{\vec{u}}, f_o) \in T(E) \times GA_o(E)$ tel que $f = t_{\vec{u}} \circ f_o$, $\vec{u} = \vec{of}(o)$ et f_o est l'unique élément de $GA_o(E)$ de même partie fixe que f .

Corollaire 7: On a la décomposition en produit semi-direct: $GA(E) = T(E) \rtimes GA_o(E)$

$$\text{avec } \alpha_{f_o}(t_{\vec{u}}) = t_{\vec{f}_o(\vec{u})}$$

2) Géométrie euclidienne

On considère un espace affine euclidien de dimension n .

Def-prop 8: Une isométrie de E est une application de E dans lui-même tel que $\forall (M, N) \in E^2$
 $d(f(M), f(N)) = d(M, N)$

Les isométries de E sont les applications affines dont la partie linéaire est un automorphisme orthogonal. $IS(E) := \{ \text{isométries de } E \}$ est un sous groupe de $GA(E)$.

Def-prop 9: Un déplacement de E est une isométrie f tel que $\vec{f} \in SO(\vec{E})$. On note $IS^+(E) := \{ \text{déplacement de } E \} \triangleleft IS(E)$ et $IS^-(E) = IS(E) \setminus IS^+(E)$

Exemple 10: Rotation: déplacement ayant un point fixe.

Reflexion: symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan (affine) de E .

Prop 11: Toute isométrie de E est la composée de au plus $n+2$ réflexions

Exemple 12: Si $f = t_{\vec{u}}$, $f = S_D \circ S_D$ (Fig 2)

Théorème 13: Soit $f \in IS(E)$, $\exists! (t_{\vec{u}}, f_o)$ avec $t_{\vec{u}} \in T(E)$ et f_o une isométrie ayant un point fixe vérifiant

$$f = t_{\vec{u}} \circ f_o = f_o \circ t_{\vec{u}}$$

De plus, dans ce cas, $\vec{u} \in \ker(\vec{f} - \text{id}_{\vec{E}})$

3) Application en dimension 2

f	\vec{P}	pts fixes	$I_S^+(\mathcal{E})$ ou $I_S^-(\mathcal{E})$
$t_{\vec{u}}$	$id_{\vec{E}}$	\mathcal{E} si $\vec{u} = \vec{0}$ aucun sinon	$I_S^+(\mathcal{E})$
rotation affine non triviale	rotation vectorielle ($\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$)	un point	$I_S^+(\mathcal{E})$
réflexion	réflexion vectorielle	une droite	$I_S^-(\mathcal{E})$
symétrie glissée de vecteur $\vec{u} \neq \vec{0}$	réflexion vectorielle	aucun	$I_S^-(\mathcal{E})$

Remarque 14: La même chose en dimension 3 nous donne $I_S^+(\mathcal{E}) = \{\text{virage}\}$, $I_S^-(\mathcal{E}) = \{\text{réflexion, symétrie glissée, antirotation}\}$

II Etude de la sphère S^{m-1} de \mathbb{R}^m

1) Cas général

Prop 15: $S_0(m)$ agit transitivement sur S^{m-1} .

Théorème 16: Il y a un homéomorphisme $S_0(n) \rightarrow S^{n-1}$

Corollaire 17: $S_0(n)$ est compact et connexe.

2) En dimension 2

Prop 18: $S_0(2)$ agit simplement transitivement sur S^1 .

Def-prop 19: On définit une relation d'équivalence

\sim sur l'ensemble $\mathcal{E}\hat{A}$ des couples de vecteurs unitaires par $(u, v) \sim (u', v')$ si il existe une rotation β telle que $\beta(u) = u'$ et $\beta(v) = v'$

• La classe d'équivalence de (u, v) est appelée angle orienté entre u et v . On note $\mathcal{A} = \mathcal{E}\hat{A} / \sim$ l'ensemble des classes.

Prop 20: $\Phi: \begin{cases} \mathcal{A} \rightarrow S_0(2) \\ (u, v) \mapsto \exists! \beta \in S_0(2) \text{ telle que } \beta(u) = v \end{cases}$

Φ est bijective. On munit \mathcal{A} d'une structure de groupe par transport de la structure de $S_0(2)$

en posant: $(u, v) + (u', v') = \Phi^{-2}(\Phi(u, v) \circ \Phi(u', v'))$

Def 21: Un polygone est régulier si ses côtés ont la même longueur et si les angles entre 2 côtés consécutifs sont égaux.

Prop 22: Soit P_n un polygone régulier à n côtés inscrit dans S^1 . On note $D_n = I_S(P_n)$ (appelé groupe diédral). D_n est un sous groupe fini de $S_0(2)$ et $D_n \cong \langle r, s \mid r^n = s^2 = (rs)^2 = id \rangle \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

3) En dimension 3

Def 23: On appelle polyèdre convexe l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points non coplanaires. Il est dit régulier si toutes ses faces sont des polygones réguliers isométriques et si la configuration locale en chaque sommet est la même.

Théorème 24: Il existe exactement 5 polyèdres convexes réguliers appelés solides de platon.

I_S^+ (tétraèdre) $\cong \mathcal{A}_4$; I_S^+ (cube) $\cong \mathcal{S}_4$; I_S^+ (octaèdre) $\cong \mathcal{S}_4$
 I_S^+ (dodécaèdre) $\cong \mathcal{A}_5$; I_S^+ (icosaèdre) $\cong \mathcal{A}_5$

Théorème 25: Les sous groupes finis de $S_0(3)$ sont D_n , $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et \mathcal{A}_4 , \mathcal{S}_4 , \mathcal{A}_5 .

4) Le paradoxe de Banach-Tarski

Def-prop 26: Soit X un G -ensemble, $A, B \subset X$, $A \cap B = \emptyset$. Alors A est G -équivalent à B noté $A \equiv B$ si $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$; $B = \bigcup_{i=1}^n B_i$, $\forall i, \exists g_i \in G, A_i = g_i B_i$. C'est une relation d'équivalence.

Def 27: X est G -dédoublable si $\exists A, B, C \subset X$ avec $A \equiv X \equiv B$

Théorème 28: $\exists D$ dénombrable tq $S^2 \setminus D$ est $S_0(3)$ -dédoublable.

Corollaire 29: S^2 est $S_0(3)$ -dédoublable.

[Amd]

[Cold]

[Gui]

DEV 1

[Aud]

III Géométrie de la droite projective complexe

Def 30: On appelle droite projective complexe $\mathbb{P}_2(\mathbb{C}) = \{ \text{droite de } \mathbb{C}^3 \setminus \{0,0,0\} / \mathbb{C}^* \}$

Prop 31: On peut aussi identifier $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ à $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ou \mathbb{S}^2

Prop 32: On note les points suivant:

- a) $PGL_2(\mathbb{C}) \curvearrowright \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ de manière simplement 3-transitive.
- b) $g \in PGL_2(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, l'action de $PGL_2(\mathbb{C})$ s'écrit $[g].t = \frac{at+b}{ct+d}$ avec $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$
- c) $PGL_2(\mathbb{C})$ est engendré par les similitudes directes et les inversions.

Def 33: On appelle homographie une application de $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ dans lui-même de la forme $t \mapsto [g].t$ avec $[g] \in PGL_2(\mathbb{C})$

Prop 34: Les homographies conservent les angles orientés

Théorème 35: Les homographies agissent de manière simplement 3-transitive sur $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$

Def-prop 36 (Birapport) Soit $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in (\mathbb{P}_2(\mathbb{C}))^4$ quatre éléments distincts. Soit h l'homographie qui envoie z_1 sur ∞ , z_2 sur 0 et z_3 sur 1 . On définit le birapport de (z_1, \dots, z_4) comme: $[z_1, z_2, z_3, z_4] = h(z_4)$

Prop 37: Le birapport est invariant par homographie, si $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in (\mathbb{P}_2(\mathbb{C}))^4$ on a: $[z_2, \dots, z_4] = \frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1} \times \frac{z_4 - z_2}{z_3 - z_2}$

Prop 38: quatre points du plan complexe sont cocycliques ou alignés si et seulement si leur birapport calculé dans $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ est réel.

Corollaire 39: Toute homographie de $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ transforme une droite-cercle en une droite-cercle.

Def 40: Un quadruplet ordonné (z_1, z_2, z_3, z_4) de birapport -1 est appelé une division harmonique.

Exemple 41: $[a, -a, a^2, 1] = -1$; $[a, b, c, \infty] = -1 \Leftrightarrow c = \frac{a+b}{2}$

Def 42: Le groupe icellulaire \mathcal{G} est le groupe engendré par les homographies et la conjugaison complexe.

Théorème 43: \mathcal{G} est exactement l'ensemble des bijections de $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ qui préservent les droites-cercles.

IV Un exemple de classification: les coniques.

1) Classification des coniques affines et euclidiennes.

Def 44: Une conique d'un plan affine E est un ensemble $\{A \in E, \ell(A) = 0\}$ où $\ell: \begin{cases} E \rightarrow K \\ A \mapsto q(\vec{OA}) + l_0(\vec{OA}) + c_0 \end{cases}$ avec $0 \in E$ origine, q une forme quadratique sur E , $l_0 \in E^*$ et $c_0 \in K$.

Exemple 45: $\ell(A) = \vec{OA} \cdot \vec{OA} - 1$ est le cercle de centre o et de rayon 1 .

Def 46: Soit $\ell: A \rightarrow q(\vec{OA}) + l_0(\vec{OA}) + c_0$ une conique.

Elle s'homogénéise de E est $\tilde{E}: \begin{cases} E \times K \rightarrow K \\ ((u, v)) \mapsto q(u) + l_0(u) + c_0 v^2 \end{cases}$

Def 47: ℓ est propre si la forme quadratique q sur $E \times K$ est non dégénérée.

Théorème 48: (Classification des coniques affines euclidiennes réelles propres).

On fixe un repère orthonormé de E . Il y a une infinité d'orbites pour l'action de $ISO(E)$ sur $\{ \text{coniques propres de } E \}$ et chaque orbite admet un unique représentant parmi $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ a^2 x^2 + b^2 y^2 = 1 \\ a^2 x^2 - b^2 y^2 = 1 \\ y = px^2 \end{cases}$ $(a, b, p) \in \mathbb{R}^3$

Théorème 49: (Classification des coniques affines réelles propres)

On fixe un repère affine de E . Il y a 3 orbites pour l'action de $GA(E)$ sur $\{ \text{coniques propres de } E \}$; admettant $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 - y^2 = 1 \\ y = x^2 \end{cases}$ pour représentant.

Références:

- [SZP]: Szpirglas. Mathématiques Algèbre L3
- [Com]: Combes. Algèbre et géométrie
- [Far]: Faraut. Analyse sur les groupes de Lie.
- [Gui]: Guinot. Le paradoxe de Banach Tarski

[Aud]: Audin. Géométrie [Cald]: Caldoro-Germoni. Histoire des théorèmes de groupes et de géométrie.

Figure 1

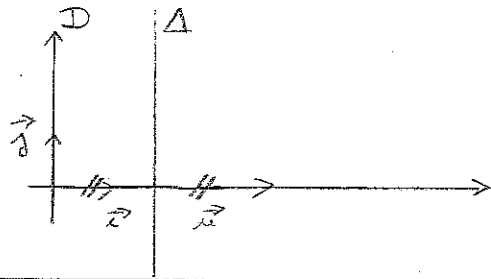


Figure 2

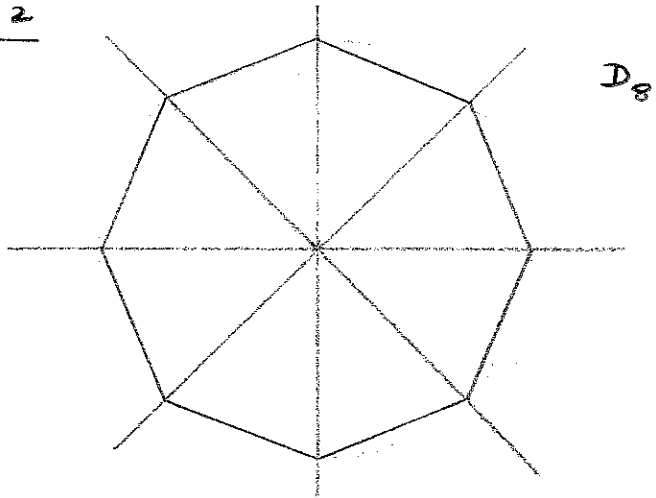


Figure 3

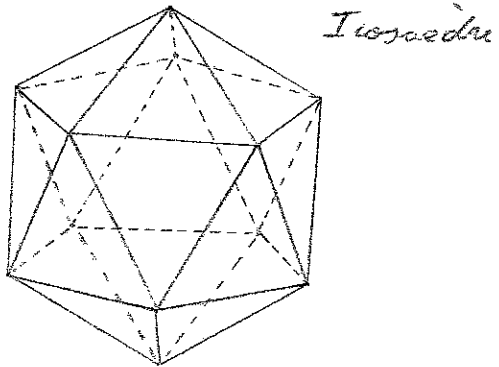


Figure 4

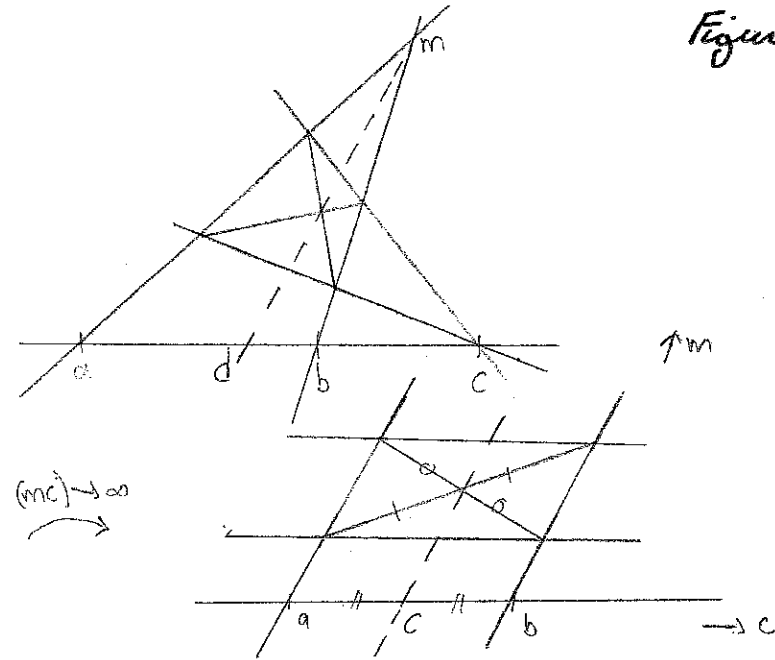


Figure 5

