I Le groupe affine [AUD] [Com]

1) Définitions et premières applications

def: Un espace affine sur $\mathbb{R}$ est un ensemble E muni d'une action de groupe $\varphi : \begin{cases} E \times (V,+) \longrightarrow E \\ (a, \vec{u}) \longmapsto a+\vec{u} \end{cases}$ libre et transitive, où V est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Conséquences:
- $\forall\, a,b \in E,\ \exists!\, \vec{u} \in V \ /\ a = b+\vec{u}$.
- Relation de Chasles.

def: Soient E et E' deux espaces affines de direction V et V'. Une application $f : E \to E'$ est dite affine si $\exists\, A \in E$ et $\varphi : V \to V'$ linéaire tels que: $\forall\, \Pi \in E,\ \varphi(\overrightarrow{A\Pi}) = \overrightarrow{f(A)f(\Pi)}$.

rq: l'application φ ne dépend pas du point A.

def: On appelle groupe affine de E l'ensemble des applications affines bijectives de E dans E, noté $GA(E)$.

prop: Avec les notations précédentes, soit $\varphi : \begin{cases} GA(E) \longrightarrow GL(V) \\ f \longmapsto \varphi \end{cases}$
Alors $\ker\varphi = T(E)$ l'ensemble des translations.

ex: Les homothéties sont des applications affines de partie linéaire $\varphi = \lambda\, id$, $\lambda \neq 0$, et forment un groupe H.

App 1: **Théorème de Thalès**: Soient d, d', d'' 3 droites parallèles distinctes, D_1 et D_2 2 droites non parallèles à d. Soient, pour $i = 1, 2$, $A_i = D_i \cap d$, $A_i' = D_i \cap d'$, $A_i'' = D_i \cap d''$.

Alors on a : $\dfrac{A_1A_1''}{A_1A_1'} = \dfrac{A_2A_2''}{A_2A_2'}$.

Réciproquement, si $B \in D_1$ vérifie $\dfrac{A_1B}{A_1A_1'} = \dfrac{A_2A_2''}{A_2A_2'}$ alors $B \in d''$, et $B = A_1''$. (voir fig 1)

App 2: **Théorème de Pappus**: Soient A, B, C 3 points d'une droite D et A', B', C' 3 points d'une droite D' distincte de D. Si AB' est parallèle à BA' et BC' est parallèle à CB' alors AC' est parallèle à CA'. (fig 2)

App 3: **Théorème de Desargues**: Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles sans sommet commun et à côtés respectivement parallèles. Alors les droites AA', BB' et CC' sont concourantes ou parallèles. (fig 3)

2) Ellipse de Steiner [H2G2]

def: Un repère affine du plan affine A_2 est un ensemble de 3 points (O, I, J) non alignés.

prop: Le groupe $GA_2(\mathbb{R})$ agit simplement transitivement sur les repères du plan affine A_2.

prop: Invariants du groupe affine: $\forall\, g \in GA_2(\mathbb{R})$, g conserve
- l'alignement
- les barycentres
- le parallélisme
- la notion de tangence.

prop: Pour l'action de $GA_2(\mathbb{R})$ sur les coniques du plan, les coniques de même type sont dans la même orbite.

App: Soit $T = ABC$ un triangle non aplati de A_2. Alors il existe une unique ellipse tritangente aux milieux des trois segments $[AB]$, $[AC]$, $[BC]$, appelée ellipse de Steiner. [DVT]

Rq: L'ellipse de Steiner d'un triangle T est l'unique ellipse contenue dans l'enveloppe convexe de T d'aire maximale : $\frac{\pi}{3\sqrt{3}} \times \text{Aire}(T)$.

II Les groupes d'isométries

Soit E un espace affine euclidien de dimension n.

1) Définitions et premières propriétés [AUD]

def: • Une isométrie vectorielle est une application linéaire qui préserve le produit scalaire. On note $O(E)$ le groupe des isométries vectorielles.

• Une isométrie affine est une application affine qui préserve la distance. On note $Is(E)$ le groupe des isométries affines.

ex: les translations, symétries orthogonales.

thm: Toute isométrie de E peut s'écrire comme composée de p réflexions, pour $p \leq n$.

thm: Soit $f \in O(E)$, alors il existe une base orthonormale B de E dans laquelle $\text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} r_{\theta_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & r_{\theta_j} \; I_r \; -I_s \end{pmatrix}$ où $r_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$

def: Une isométrie de déterminant positif (resp. négatif) est appelée isométrie directe (resp. indirecte), leur groupe est noté $O^+(E)$ (resp. $O^-(E)$).

2) Angles orientés. [AUD]

prop: Le groupe $O_2^+(\mathbb{R})$ agit simplement transitivement sur $\hat{A}$ l'ensemble des couples de vecteurs unitaires du plan : ie $\forall x, y \in \mathbb{R}^2 / \|x\| = \|y\| = 1$, $\exists! r \in O_2^+(\mathbb{R}) / y = r(x)$

def: On définit une relation d'équivalence sur $\hat{A}$ par : $(u,v) \sim (u',v')$ ssi $\exists f \in O_2^+(\mathbb{R}) / f(u) = u'$ et $f(v) = v'$.
La classe d'équivalence de (u,v) est appelée angle orienté entre u et v.

prop: Les isométries vectorielles du plan sont composées d'une ou deux réflexions. La composée de deux réflexions s_D et $s_{D'}$ est une rotation qui ne dépend que de l'angle orienté entre les droites D et D'.

3) Isométries d'un polygone ou d'un polyèdre. [AUD] [H_2G_2]

def: Un polygone convexe du plan est dit régulier si tous ses côtés ont la même longueur et tous ses angles ont la même mesure.

prop: Soit P un polygone régulier à n côtés. On note D_n l'ensemble des isométries de P. Alors, D_n est un sous-groupe fini de $O_2^+(\mathbb{R})$ et $D_n = \langle r, s / \; r^n = s^2 = (rs)^2 = id \rangle$

def: Un polyèdre convexe est dit régulier si toutes ses faces sont des polygones réguliers isométriques et si en chaque sommet, elles s'assemblent de la même façon.

thm: Il existe 5 types de polyèdres réguliers : le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre.

prop: Le groupe des isométries du tétraèdre régulier $Is(T)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$; et $Is^+(T) \simeq A_4$.

prop: Le groupe des isométries du cube $Is(C)$ est : $Is(C) \simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; et $Is^+(C) \simeq \mathfrak{S}_4$.

thm: Les sous-groupes finis de $O_3^+(\mathbb{R})$ sont D_n, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, A_4, $\mathcal{O}_4$ et A_5.

III Groupe des homographies [AUD] [H2G2]

On note $\mathbb{P}(E)$ l'espace projectif du $\mathbb{K}$-ev E.

def: Une homographie $g: \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E')$ est une application telle qu'il existe un isomorphisme linéaire $f: E \to E'$ tel que $p' \circ f = g \circ p$, où $p: E\setminus\{0\} \to \mathbb{P}(E)$ et $p': E'\setminus\{0\} \to \mathbb{P}(E')$ projections. En d'autres termes, le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} E\setminus\{0\} & \xrightarrow{f} & E'\setminus\{0\} \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ \mathbb{P}(E) & \xrightarrow{g} & \mathbb{P}(E') \end{array}$$

prop: L'ensemble des homographies de $\mathbb{P}(E)$ dans lui-même est un groupe isomorphe à $PGL(E)$.

def: On appelle droite projective complexe l'espace $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}\setminus\{0\}/\sim$ où $\sim$ est la relation de colinéarité. On identifie $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ à $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

prop: $PGL_2(\mathbb{C})$ agit simplement 3-transitivement sur $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ via: $g \cdot t := \frac{at+b}{ct+d}$ avec $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$ et $t \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.
Autrement dit:

- il existe une unique homographie envoyant le triplet de droites (D_1, D_2, D_3) de $\mathbb{C}^2$ sur un triplet distinct (D_1', D_2', D_3').
- Il existe une unique homographie envoyant le triplet de points (z_1, z_2, z_3) de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ sur un triplet (z_1', z_2', z_3') distinct.

prop: Les homographies de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ conservent les angles orientés.

def/prop: On appelle birapport de $a, b, c, d \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ l'image de d par l'unique homographie envoyant a sur ∞, b sur 0 et c sur 1. On le note $[a, b, c, d]$. Et on a $[a, b, c, d] = \frac{d-b}{d-a} \times \frac{c-a}{c-b}$

prop: 4 points de $\mathbb{C}$ sont alignés ou cocycliques ssi leur birapport est réel.

corr: Toute homographie de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ transforme un cercle ou une droite de $\mathbb{C}$ en un cercle ou une droite.

def: Le groupe circulaire G est le groupe engendré par les homographies et la conjugaison complexe.

prop: Le groupe circulaire est engendré par les inversions et les réflexions.

thm: G est exactement l'ensemble des bijections de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ qui préservent l'ensemble des droites et des cercles.

DVT

Fig 1: Théorème de Thalès:

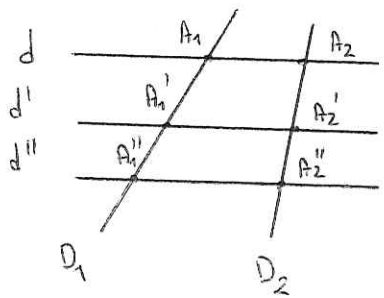


Fig 2: Théorème de Pappus:

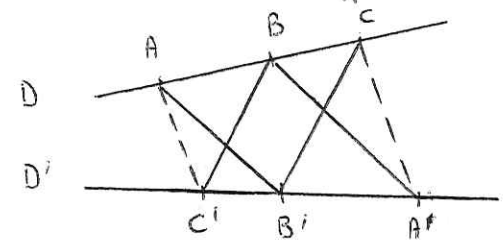
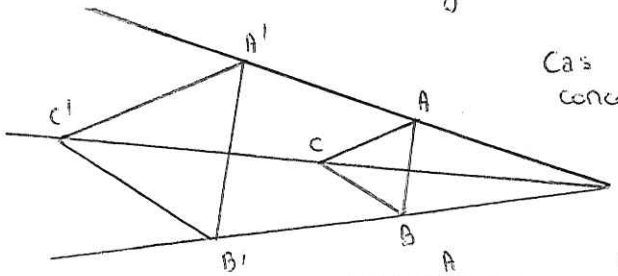
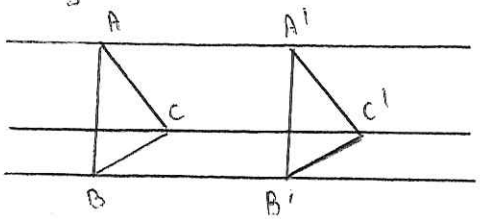


Fig 3: Théorème de Desargues:



Cas des droites concourantes

Cas des droites parallèles



Références:

[AUD] : Audin, Géométrie

[CON] : Combes, Algèbre et géométrie

[H_2G_2] : Caldero, Germoni, Histoires hédonistes de groupes et géométries.

Penser à l'exemple de l'ensemble des solutions d'une EDL.
T(E) ◁ GA(E) (noyau de l'appli qui associe la partie linéaire)
Utilisation des angles orientés : théorème de l'angle inscrit.
Leçon à rapprocher de celle sur les groupes (actions de groupes)
Groupes diédraux.
Birapport.

DVPT 1 : Existence et unicité de l'ellipse de Steiner. (agregmaths.free)

Théorème 1. *Soit $T = ABC$ un* vrai triangle *du plan affine $\mathbb{A}_2$ et A', B', C' les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. Il existe* une unique ellipse tritangente *aux points A',B' et C' que l'on appelle* ellipse de Steiner de ABC.

Démonstration. :

Existence

Etatpe 1 : Les points A, B et C étant non alignés, ils définissent un *repère* du plan affine $\mathbb{A}_2$. L'existence d'une ellipse répondant au problème est évidente dans le cadre d'un triangle équilatéral $A_0B_0C_0$, le cercle *inscrit* au triangle répondant au problème, on va essayer de s'y ramener via l'action d'un élément du groupe affine $GA_2(\mathbb{R})$.

Etape 2 : Notons $T_0 = A_0B_0C_0$ un triangle équilatéral, il existe une unique bijection affine g telle que $g(A_0) = A$, $g(B_0) = B$ et $g(C_0) = C$. Il suffit en effet de définir g par $g(A_0) = A$ et $\overrightarrow{g}(\overrightarrow{A_0B_0}) = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{g}(\overrightarrow{A_0C_0}) = \overrightarrow{AC}$, une application *linéaire bijective* étant uniquement déterminée par *l'envoi d'une base sur une base*. L'action de $g \in GA_2(\mathbb{R})$ va ainsi permettre d'envoyer le repère affine $\{A_0, B_0, C_0\}$ sur le repère affine $\{A, B, C\}$ puis le triangle équilatéral $A_0B_0C_0$ sur le triangle ABC, ie $g(T_0) = T$.

Etape 3 : La conservation du barycentre par une application affine garantit que les milieux des côtés de ABC sont exactement les images par g des milieux des côtés de $A_0B_0C_0$.

Etape 4 : L'*image d'une conique* par une *transformation* affine (application affine bijective) étant *une conique* et g étant *continue* car affine, elle envoie le cercle $\mathcal{C}$ inscrit dans T_0 qui est une conique *compacte* sur une *conique compacte* inscrite dans T, c'est-à-dire *une ellipse* que l'on note $\mathcal{E}$.

Etape 5 : Enfin, g étant affine, elle est *différentiable*, de différentielle sa partie linéaire $\overrightarrow{g}$ $(*)$. Ainsi, g *conserve la notion de tangence* ie si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de la tangente T en un point M de $\mathcal{C}$, alors $dg(M)(\overrightarrow{u})$ est un vecteur directeur de la tangente à l'ellipse $\mathcal{E} = g(\mathcal{C})$ au point $g(M)$. Par définition, $\mathcal{C}$ est tritangente au triangle $A_0B_0C_0$ aux points $A'_0 = m[B_0C_0]$, $B'_0 = m[A'_0C'_0]$ et $C'_0 = m[A_0B_0]$, on a donc :

- $D_1 = (A_0B_0)$ est tangente à $\mathcal{C}$ en $C'_0 \Longrightarrow \overrightarrow{g}(\overrightarrow{A_0B_0}) = \overrightarrow{AB}$ et (AB) est tangente à $\mathcal{E}$ en $g(C'_0) = C'$.
- $D_2 = (A_0C_0)$ est tangente à $\mathcal{C}$ en $B'_0 \Longrightarrow \overrightarrow{g}(\overrightarrow{A_0C_0}) = \overrightarrow{AC}$ et (AC) est tangente à $\mathcal{E}$ en $g(B'_0) = B'$
- $D_3 = (B_0C_0)$ est tangente à $\mathcal{C}$ en $A'_0 \Longrightarrow \overrightarrow{g}(\overrightarrow{B_0C_0}) = \overrightarrow{BC}$ et (BC) est tangente à $\mathcal{E}$ en $g(A'_0) = A'$

Finalement, $\mathcal{E}$ est une ellipse tritangente à T aux points A', B', C'.

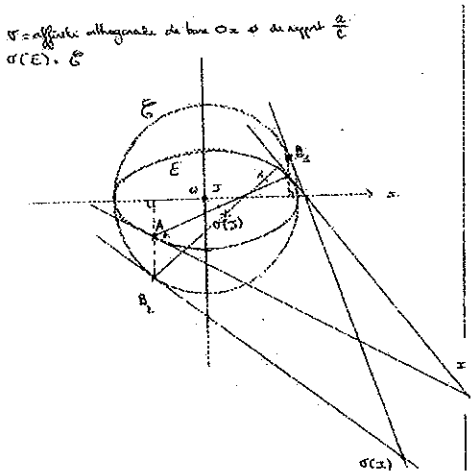
Unicité

Méthode : d'après la partie existence, via la transformation affine $g \in GA_2(\mathbb{R})$, il suffit de démontrer l'existence d'une unique ellipse répondant au problème, lorsque le triangle est equilatéral.

Etape 1 :
Objectif 1 : soit $\mathcal{E}$ une ellipse du plan affine $\mathbb{A}_2$, exhibons une symétrie laissant invariante $\mathcal{E}$.

Soient A_1 et A_2 deux points distincts de $\mathcal{E}$ et T_1, T_2 les tangentes à $\mathcal{E}$ en ces points. On note également I le point d'intersection de T_1 et T_2 et J le milieu de $[A_1, A_2]$, notre objectif est alors de prouver que $\mathcal{E}$ est invariante par la symétrie par rapport à (IJ) parallèlement à (A_1A_2).
Pour ce faire, introduisons quelques notations. On note s la symétrie par rapport à (IJ) parallèlement à (A_1A_2) et σ l'affinité orthogonale de base (FF') de rapport a/b où F, F' sont les foyers de $\mathcal{E}$ et b, a les longueurs respectivement du petit axe et du grand axe de $\mathcal{E}$. Enfin, on note s' la symétrie par rapport à $(\sigma(I)\sigma(J))$ parallèllement à $(\sigma(A_1)\sigma(A_2)) = (B_1B_2)$.

Propriétés : $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{C}$ est le cercle de rayon a centré en 0, le centre de l'ellipse. Comme σ est une transformation affine, d'après la partie existence, elle préserve la tangence et on a aussi $\sigma(T_1)$ est tangente à $\mathcal{C}$ en $B_1 = \sigma(A_1)$ et $\sigma(T_2)$ est tangente à $\mathcal{C}$ en $B_2 = \sigma(A_2)$.



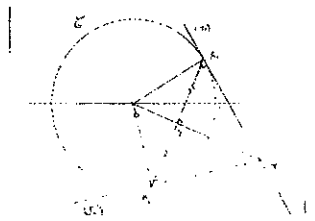
But : montrons qu'il suffit de prouver $s'(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$, pour avoir $s(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$. En effet, on a :

$$s'(\mathcal{C}) = \mathcal{C} \Longrightarrow s'(\sigma(\mathcal{E})) = \sigma(\mathcal{E}) \Longrightarrow \sigma^{-1} \circ s' \circ \sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{E}.$$

Alors prouver que $s(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$, revient à montrer que $\sigma^{-1} \circ s' \circ \sigma = s$ et I, J et A_2 étant trois points non alignés, et formant un repère affine, il suffit de prouver que $\sigma^{-1} \circ s' \circ \sigma$ et s coïncident en ses 3 points. Or $s'(\sigma(I)) = \sigma(I) \Longrightarrow \sigma^{-1} \circ s' \circ \sigma(I) = I = s(I)$ par définition de s,s' et de même, $\sigma^{-1} \circ s' \circ \sigma(J) = s(J)$. Enfin, par conservation du barycentre par une application affine, on a :

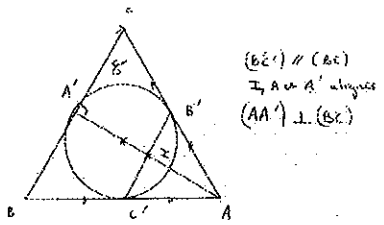
$$\sigma(J) = m[\sigma(A_1)\sigma(A_2)] \Longrightarrow s'(\sigma(A_1)) = \sigma(A_2) \Longrightarrow \sigma^{-1} \circ s' \circ \sigma(A_1) = A_2 = s(A_1).$$

But : montrons donc $s(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$ pour $\mathcal{E} = \mathcal{C}(O, R)$ le cercle de centre O et de rayon R. Soient $A_1 \neq A_2 \in \mathcal{E}$ et T_1, T_2 les tangentes à $\mathcal{E}$ en ces points et $J = T_1 \cap T_2$, $I = m[A_1A_2]$.



OA_1J et OA_2J sont rectangles en A_1, A_2 avec $OA_1 = OA_2 = R$. Par le théorème de Pythagore $JA_1 = JA_2$ et les points O, I, J sont alignés car sont sur (IJ) : la médiatrice du segment $[A_1A_2]$. Ainsi, s est la réflexion d'axe (IJ). Comme s est une isométrie, s envoie le cercle $\mathcal{E}$ de rayon R et de centre O sur le cercle de rayon R et de centre $s(O) = O$ car $O \in (IJ)$. D'où $s(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.

Etape 2 : montrons que le cercle inscrit $\mathcal{C}$ est la seule ellipse répondant au problème posé dans le cas d'un triangle équilatéral ABC.



Raisonnons par l'absurde et considérons $\mathcal{E}$ est une autre ellipse répondant au problème.
Méthode : on va prouver le résultat en montrant que $\mathcal{E}$ admet 3 axes de symétries, donc est un cercle, ce qui donnera l'unicité par unicité du cercle inscrit d'un triangle. On a alors naturellement (AC) est tangente à $\mathcal{E}$ en B', (AB) est tangente à $\mathcal{E}$ en C' et $(AB) \cap (AC) = C$ et soit $I = m[B'C']$. Par le théorème de la droite des milieux avec ABC équilatéral, on en déduit que : A, I et A' sont alignés sur la médiatrice du segment $[BC]$. Ainsi, la symétrie par rapport à $(AI) = (AA')$ parallèlement à $(B'C')//(BC)$ est exactement la réflexion d'axe (AA'). D'après l'étape 2 on en déduit : $s_{(AA')}(\mathcal{E}) = \mathcal{E} \Longrightarrow (AA')$ est un axe de symétrie de l'ellipse. On trouve de même que (BB') et (CC') sont des axes de symétries de l'ellipse. D'où le résultat.

Conclusion : soit $T = ABC$ quelconque, et $T_0 = A_0B_0C_0$ un triangle équilatéral. Il existe une unique transformation affine $g \in GA_2(\mathbb{R})$ telle que $g(T) = T_0$. D'après la partie existence, il existe une ellipse tritangente aux milieux des côtés de ABC que l'on note $\mathcal{E}$. Alors, $g(\mathcal{E})$ est une ellipse inscrite dans le triangle equilatéral $A_0B_0C_0$ tritangente aux milieux de ces côtés et d'après ce qu'on a vu précédemment $g(\mathcal{E})$ est nécessairement le cercle inscrit $\mathcal{C}$ du triangle $A_0B_0C_0$ et :

$$\mathcal{E} = g^{-1}(\mathcal{C}) \text{ est définie de manière unique.}$$

D'où l'unicité de l'ellipse de Steiner. □

Corollaire 1. *L'ellipse de Steiner de $T = ABC$ est un cercle $\iff$ T est équilatéral.*

Démonstration. $2 \implies 1$ a déjà été montré. Montrons donc $1 \implies$ et commençons par prouver que le centre de symétrie de l'ellipse de Steiner est aussi le centre de gravité du triangle ABC. Par ce qui précède, le centre de l'ellipse de Steiner G est envoyé par l'application affine g sur le centre G_0 du cercle $\mathcal{C}$ inscrit dans le triangle équilatéral $A_0B_0C_0$ (une transformation affine envoie un centre de symétrie sur un centre de symétrie). Or G_0 est l'isobarycentre des sommets A_0, B_0 et C_0 de $A_0B_0C_0$, par conservation du barycentre par une application affine, le centre de l'ellipse de Steiner vérifie donc que G est l'isobarycentre de A,B et C, soit :

$$G \text{ est le centre de gravité de } ABC.$$

Supposons donc que l'ellipse de Steiner de ABC soit un cercle que l'on note $\mathcal{C}$. Le centre de l'ellipse de steiner est d'après ce qui précède le centre de gravité du triangle ABC, or (BC) étant tangente à $\mathcal{C}$ en $A' = m[BC]$ on a :

$$(A'G) \perp (BC) \text{ avec } G \in (AA').$$

On en déduit donc que $(A'A)$ est la médiatrice de $[BC]$ et donc par le théorème de Pythagore que $AB = AC$. On montre de même que $BC = AB$ soit $AB = AC = BC \implies ABC$ est équilatéral. □

Explications supplémentaires : $(*)$ Notant (O, I, J) le repère orthonormée canonique de $\mathbb{R}^2$ où $e = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$, on a :

$$g(O) = M_0 = (x_0, y_0) \text{ et } Mat_e \overrightarrow{g} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$$

soit en termes de coordonnées :

$$g(x, y) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \implies dg_{(x,y)}(h, k) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

et donc pour tout $M \in \mathbb{A}_2$, $dg(M) : \overrightarrow{OH} \longrightarrow \overrightarrow{g}(\overrightarrow{OH})$.

Rappel 1. *Une ellipse ayant au moins 3 axes de symétries distincts est un cercle.*

Références :

- Caldero et Germoni. Pour la partie existence.
- Correction du Capes de 1990 pour la partie unicité. Dany Jack Mercier. → introuvable à la BU

Le groupe circulaire

Florian BOUGUET

(Agreg maths KL)

Référence : M. Audin, *Géométrie*

On voit ici la droite projective complexe $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ comme le plan complexe muni d'un point à l'infini, que l'on notera ∞ pour être un peu original.

Theorème 1

Notons G le groupe engendré par les homographies et la conjugaison complexe. G est exactement l'ensemble des bijections de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sur lui-même préservant l'ensemble des cercles ou droites (c'est-à-dire envoyant un cercle ou une droite sur un cercle ou une droite).

Preuve du théorème :

On va procéder par double inclusion, et un sens est trivial. En effet, on sait que les homographies sont des bijections de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sur lui-même. D'autre part, puisqu'elles préservent le birapport (et puisque le birapport de quatre points est réel si, et seulement si, ils sont alignés ou cocycliques) elles préservent l'ensemble des cercles ou droites. Enfin, la conjugaison complexe est une symétrie toute bête par rapport à $\mathbb{R}$, et envoie donc un cercle sur un cercle et une droite sur une droite.

Considérons φ une bijection de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sur lui-même préservant l'ensemble des cercles ou droites. Rappelons qu'à tout couple de triplets de points de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ correspond une homographie envoyant le premier sur le second. Donc, quitte à composer φ par une homographie (ce qui ne modifie l'appartenance ou la non-appartenance à G), on peut supposer que $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$ et $\varphi(\infty) = \infty$. Cette troisième condition sur φ implique immédiatement que φ conserve les cercles ou les droites, mais séparément cette fois-ci !

φ préserve les divisions harmoniques

On va montrer que φ conserve les divisions harmoniques. Rappelons que a, b , c et d sont en division harmonique si $[a, b, c, d] = -1$. Un cas particulier très utile par la suite est que

$$[a, b, c, \infty] = -1 \Leftrightarrow c = \frac{a+b}{2}$$

Cette partie du développement fait appel au lemme suivant :

Lemme 1

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ distincts. La construction de l'unique point $d \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ tel que a, b, c et d soient en division harmonique se fait uniquement en matière d'intersection et de tangence de droites et de cercles.

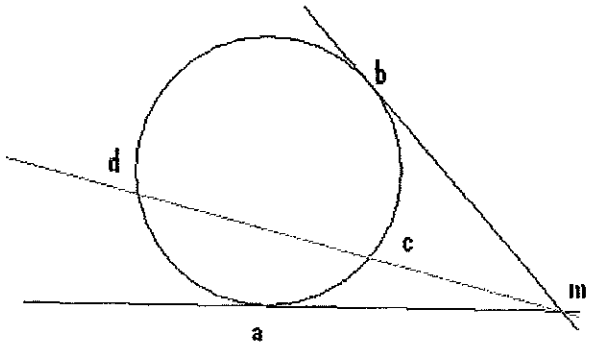
Une fois ce lemme prouvé, la conclusion est quasiment immédiate. En effet, φ préserve la tangence et l'intersection par injectivité, et préserve les cercles ou les droites. Donc φ préservera

la situation des points a, b, c et d et donc le fait qu'ils soient en division harmonique.

Preuve du lemme :

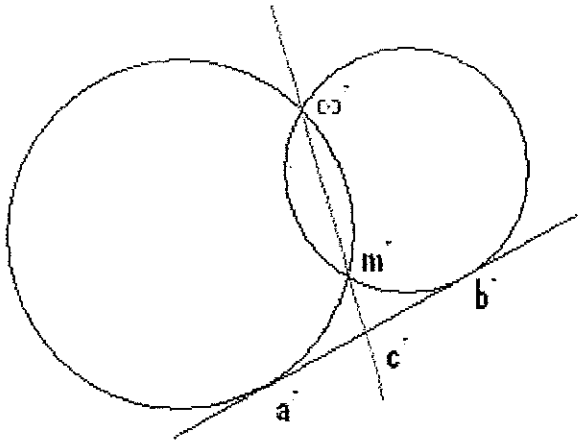
On se donne donc trois points $a, b, c \in \mathbb{C}$ distincts. Deux cas se posent : les points sont alignés ou cocycliques. Nous donnerons à chaque fois la méthode de construction du point d, que nous justifierons ensuite.

Cas des points cocycliques
Construction :



Considérons le point m issu des tangentes à a et b (qui peut éventuellement être égal à ∞ si les tangentes sont parallèles). La seconde intersection de la droite (mc) avec le cercle est d.

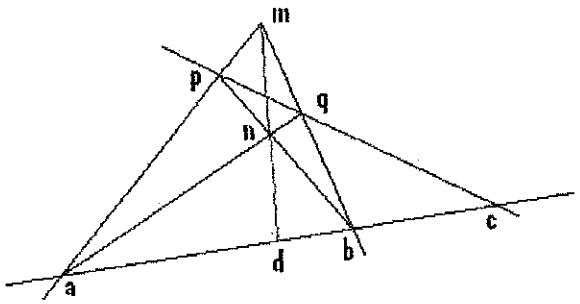
Justification : *On envoie d à l'infini par une homographie*



La droite rouge devient l'axe radical des deux cercles, et coupe donc $[ab]$ en son milieu, c. Donc $[a, b, c, d] = -1$, et on peut conclure par conservation du birapport par les homographies (si comme 99% des étudiants de M2 vous n'avez jamais entendu parler d'axe radical ou de puissance par rapport à un cercle, allez jeter un oeil aux remarques). Si $m = \infty$, alors la droite rouge devient la tangente commune aux deux cercles, et est encore leur axe radical.

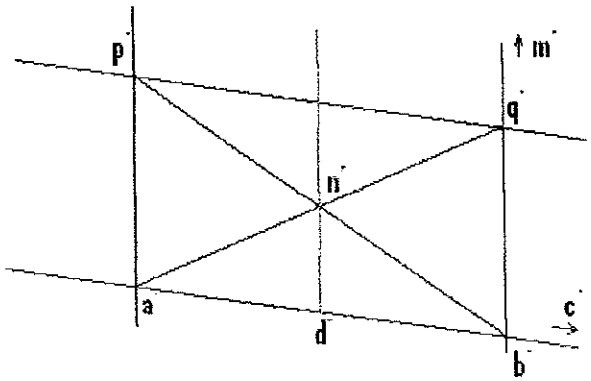
Cas des points alignés

Construction :



On choisit un point m en dehors de la droite (ab), et on trace une droite issue de c coupant $[am]$ et $[bm]$. On peut alors tracer la droite (mn), où n est le centre du quadrilatère qu'on vient d'obtenir. (mn) coupe (ab) en d.

Justification 1 : *On envoie (mc) à l'infini par une homographie*



Cette justification, bien que plus intuitive et plus rapide, utilise malheureusement des notions de plan projectif et d'homographies en dimension supérieure, qui ne sont plus au programme (du moins en 2012) et risque donc de vous entraîner sur un terrain glissant. En effet, la justification se fait dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$...Bref, n' devient le centre d'un parallélogramme, et la droite rouge coupe donc $[a'b']$ en son milieu. On a alors que $[a', b', c', d'] = [a', b', d', c']^{-1} = [a', b', d', \infty]^{-1} = -1$, et on peut alors conclure à nouveau par conservation du birapport.

Justification 2 :

On se place en coordonnées barycentriques dans le système (a, b, m). Rappelons que toutes les coordonnées sont définies à constante multiplicative non-nulle près. Si $n = (\alpha, \beta, \mu)$, où α, β, mu sont tous non-nuls, alors on a immédiatement $p = (\alpha, 0, \mu), q = (0, \beta, \mu), d = (\alpha, \beta, 0)$ car ils appartiennent chacun à un côté du triangle.

p, q et c sont alignés, donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $c = p + \lambda q = (\alpha, \lambda\beta, (1+\lambda)\mu)$. Puisque a, b et c sont aussi alignés, $(1+\lambda)\mu = 0$ donc $c = (\alpha, -\beta, 0)$.

Donc

$$\frac{d-b}{d-a} = \frac{\alpha}{\beta} = -\frac{\alpha}{-\beta} = \frac{c-b}{c-a}$$

Donc $[a,b,c,d] = -1$.

φ est un automorphisme de corps

Grâce à la conservation des divisions harmoniques, on va montrer que $\varphi_{|\mathbb{C}}$ est un automorphisme de corps. Considérons $a, b \in \mathbb{C}$. φ conserve les divisions harmoniques donc les milieux.

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) &= \frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2} \\ &= \varphi\left(\frac{(a+b)+0}{2}\right) = \frac{\varphi(a+b)+\varphi(0)}{2} = \frac{\varphi(a+b)}{2}\end{aligned}$$

Donc $\varphi(a+b) = \varphi(a)+\varphi(b)$. On en déduit que

$$\varphi(a-a) = \varphi(a)+\varphi(-a) = \varphi(0) = 0$$

Donc $\varphi(-a) = -\varphi(a)$.

$\forall a \in \mathbb{C}\backslash\{0,1\}$, remarquons que

$$[a,-a,a^2,1] = \frac{\frac{1+a}{1-a}}{\frac{a^2+a}{a^2-a}} = \frac{\frac{1+a}{1-a}}{-\frac{1+a}{1-a}} = -1$$

Les points a, $-a$, a^2 et 1 étant en division harmonique, on a

$$\begin{aligned}[a,-a,a^2,1] &= [\varphi(a),\varphi(-a),\varphi(a^2),\varphi(1)] = [\varphi(a),-\varphi(a),\varphi(a^2),1] \\ &= [\varphi(a),-\varphi(a),1,\varphi(a^2)] = -1\end{aligned}$$

Cette relation étant vraie pour tout complexe différent de 0 et 1, elle reste vraie pour $\varphi(a)$ si $a \neq 0$ ou 1. Donc

$$\begin{aligned}[\varphi(a),-\varphi(a),\varphi(a)^2,1] &= [\varphi(a),-\varphi(a),1,\varphi(a)^2] = -1 \\ &= [\varphi(a),-\varphi(a),1,\varphi(a^2)]\end{aligned}$$

Par unicité du birapport, on conclut que $\varphi(a^2)$=$\varphi(a)^2$ (ce résultat reste vrai si $a = 0$ ou 1)

Pour finir, remarquons que $ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$. Donc

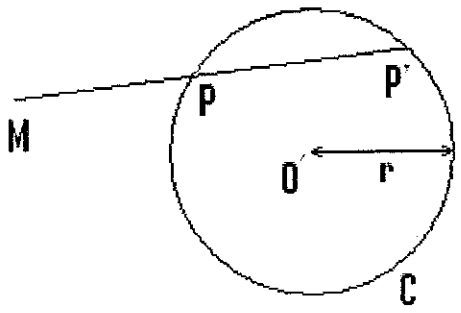
$$\begin{aligned}\varphi(ab) &= \varphi\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right) \\ &= \varphi\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right) - \varphi\left(\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right) \\ &= \left(\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^2 - \left(\varphi\left(\frac{a-b}{2}\right)\right)^2 \\ &= \left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)^2 - \left(\frac{\varphi(a)-\varphi(b)}{2}\right)^2 \\ &= \varphi(a)\varphi(b)\end{aligned}$$

$\varphi_{|\mathbb{C}}$ est donc un automorphisme de corps.

Puisque $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $\varphi_{|\mathbb{R}}$ est l'identité. $\varphi(i)^2 = -1$ et $\varphi(a + ib) = a + \varphi(i)b$. Donc $\varphi(i) = \pm 1$. Donc $\varphi_{|\mathbb{C}} = Id$ ou $z \mapsto \bar{z}$. Donc $\varphi \in G$, CQFD.

REMARQUE

Dans la démonstration du cas cocyclique du lemme, il faut montrer que c', point d'intersection de la droite rouge et de $(a'b')$, est milieu de $[a'b']$. Il ne s'agit pas d'un fait trivial, et la façon la plus élégante (et élémentaire) de le démontrer consiste à introduire la notion de puissance par rapport à un cercle.



On appelle puissance de M par rapport au cercle C la quantité

$$\rho_C(M) = OM^2 - r^2$$

Il est évident que C est exactement l'ensemble des points de puissance nulle par rapport à lui-même. De plus, un petit calcul vectoriel donne aussi que

$$\rho_C(M) = \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MP'}$$

Enfin, on appelle axe radical des cercles C et C' la droite de points ayant même puissance par rapport à chacun des cercles.

Après avoir introduit tout ceci, ramenons-nous au cas qui nous intéresse. La droite rouge est l'axe radical des deux cercles (en effet, elle passe par leurs points d'intersections, qui appartiennent évidemment à l'axe radical). c' appartient donc à l'axe radical, et on en déduit que

$$(a' - c')(a' - c') = (b' - c')(b' - c')$$

Donc c' est bien le milieu de $[a'b']$.