

Groupe qui agit sur la sphère

manque d'exemples \mathbb{R}^n comme le torse
 Trop de petites choses à droite à gauche.

183

Utilisation des groupes en géométrie

- def espace affine
- Groupe circulaire
- \mathbb{T}^n planaire
- savoir identifier le rapport
- p - Sylow de G_4
- dans \mathbb{T}^n de \mathbb{R}^n engendré
- coliage de solide

1) Géométrie affine

On note \mathbb{E} un espace affine de dimension n , E l'espace vectoriel associé, $A(E)$ l'ensemble des applications affines de \mathbb{E} dans lui-même.

Prop: $A(E)$ est exactement l'ensemble des applications qui préservent les barycentres de \mathbb{E} .

1) Espace affine: généralité

Proposition 1 Définition 1 Les bijections affines de \mathbb{E} dans lui-même forment un groupe, noté $GA(E)$.

ex: Les homothéties sont dans $GA(E)$.

Proposition 2 Un $(n+1)$ -uplet de \mathbb{E} (O, A_1, \dots, A_n) est un repère affine si (OA_1, \dots, OA_n) est une base de E .

ex: une affinité orthogonale est une bijection affine qui s'écrit dans une base orthonormée $f(x,y) = (ax, by)$

Proposition 3 $GA(E)$ agit simplement transitivement sur l'ensemble des repères affines de \mathbb{E} .

2) Utilisation du groupe affine en dimension 2

On suppose dans cette partie que \mathbb{E} est de dimension 2. Grâce aux homothéties, on peut déformuler les deux théorèmes suivants:

Théorème de Desargès Illustration en orange

Soient d, d' deux droites parallèles, et D_1, D_2 deux droites sécantes en A , dont aucune n'est parallèle à d . Soit, pour $i=1,2$, $A_i = D_i \cap d, A'_i = D_i \cap d'$

Alors on a: $\frac{AA_1}{A_1A_2} = \frac{AA'_1}{A'_1A'_2}$. Réciproquement, si $B \in D_1$

vérifie $\frac{AB}{BA_1} = \frac{AB'}{A'_1A'_2}$, alors B est sur d' , c'est-à-dire $B \in A_2$.

De théorème de Desargès, on peut déduire le théorème de Desargès et son illustration en orange.

Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles tels soient communs et à côtés respectivement parallèles.

Alors (AA') , (BB') et (CC') sont concourants ou parallèles. Le résultat revient à dire notamment les affinités orthogonales.

Proposition (Alliage de Steiner) Il existe une unique ellipse équirépartie aux milieux des côtés d'un triangle non plat.

Le résultat s'exprime également aux bords suivants: les applications affines bijectives préservent la tangence.

L'image d'une conique par une application affine bijective est une conique de même type.

II) Géométrie euclidienne

On suppose maintenant que \mathbb{E} est affine euclidien.

Proposition 1 On note $\mathcal{G}_s(E)$ l'ensemble des déplacements de $A(E)$ qui préservent la distance.

Proposition 2 $\mathcal{G}_s(E)$ est un groupe et l'application $\mathcal{G}_s(E) \rightarrow O(E)$ est un morphisme de groupes respectif

$f \mapsto f$ dont le noyau est l'ensemble des translations.

ex: symétrie orthogonale $S: \exists O \in E, \forall M \in E, d(O, M) = d(O, S(M))$ où S est une symétrie orthogonale vectorielle. Alors de $\mathcal{G}_s(E)$

Définition 3 $\mathcal{G}_s(E) = \{f \in \mathcal{G}_s(E), \det f = 1\}$. $\mathcal{G}_s^+(E)$ est appelé l'ensemble des déplacements de \mathbb{E}

$\mathcal{G}_s(E)$ p 58

p 52

à montrer

$\mathcal{G}_s(E)$

$\mathcal{G}_s^+(E)$

Proposition 13 Les symétries renversent les angles orientés (de droite ou de gauche): $(A'B'C', s(\sigma')) = (A'B'C, s(\sigma)) = -s(\sigma)$

Corollaire 14 Les isométries de E préservent les angles orientés

Corollaire 15 Théorème des angles inscrits: si A, B, C sont trois points distincts d'un cercle et centre O , on a $\angle(OA, OB) = 2\angle(OA, OC)$

Proposition 16 (coplanarité): Soient $A, B, C \in E$ trois points non alignés. Un point D est sur le cercle qui s'ils déterminent si et seulement si les angles de droite (CA, CB) et (CA, DB) sont égaux.

e) Sous-groupes de $\mathcal{I}(E)$

Si X est une partie de E , on note $\mathcal{I}_0(X)$ (resp. $\mathcal{I}_s(X)$) le groupe des isométries (resp. éplacements) de E qui préservent X .

Proposition 17 En dimension 2, si P_n est un polygone régulier à n côtés, alors $\mathcal{I}(P_n) \cong D_n = \langle \sigma, \rho \mid \sigma^n = id, \rho\sigma = \sigma\rho \rangle$

Définition 18 On appelle "solide platonicien" un polyèdre de dimension 3, d'intérieur non vide, régulier (faces identiques et régulières) et convexe.

Chaque \mathcal{P} à similitude près, il y a cinq solides platoniciens: le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre.

Proposition 20 Soit T un tétraèdre, C un cube.

$\mathcal{I}_0(T) = S_4$ $\mathcal{I}_s(T) = A_4$
 $\mathcal{I}_0(C) = S_4 \times \mathbb{Z}_2$ $\mathcal{I}_s(C) = S_4$

Remarque: on peut en déduire une représentation de D_n , deus de S_4 et une de A_4 , qui se trouvent être irréductibles.

Définition 21 (groupe ponctuel): Soit E un espace affine euclidien de dimension 2, P un compact de E d'intérieur non vide et G un sous-groupe de $\mathcal{I}_s(E)$.

2) Classification des isométries

Proposition 22 Soit f une isométrie de E . Il existe une isométrie φ et une translation t_v de E telles que:

- l'espace F des points fixes de φ est non vide,
- le vecteur v de la translation est dans la direction F et $F \perp v$
- on a $f = t_v \circ \varphi$

De plus, le couple (v, φ) est unique, les isométries t_v et φ commutent, et $F = \ker(f - id_E)$.

Application en dimension 2: une isométrie affine est soit: une translation, une rotation, une réflexion ou une symétrie glissée

Application en dimension 3: une isométrie affine est soit une translation, une rotation, un vissage, une réflexion, une symétrie glissée orthogonale, une anti-rotation

3) Angles

On suppose dans cette partie que E est de dim. 2

Reprod.: si $\rho \in O(E)$, alors $\exists! \theta \in \mathbb{R} \text{ mod. } 2\pi$ tel que, dans toute base orthonormée directe, ρ s'écrit:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

On note alors $\eta_\rho := \theta$.

Proposition / Définition 23 Soient $\vec{u}, \vec{v} \in E \setminus \{0\}$. Alors $\exists! \alpha \in O^+(E)$ tel que $\alpha(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}) = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$. On note $(\vec{u}, \vec{v}) = \theta \in [0, 2\pi[$ l'angle orienté entre \vec{u} et \vec{v} .

Définition 24 (angle orienté de droite): Soient D_1, D_2 deux droites dirigées par \vec{u}_1, \vec{u}_2 . L'angle orienté entre D_1 et D_2 est (\vec{u}_1, \vec{u}_2) modulo π .

On suppose dans cette partie que E est de dim. 2

Reprod.: si $\rho \in O(E)$, alors $\exists! \theta \in \mathbb{R} \text{ mod. } 2\pi$ tel que, dans toute base orthonormée directe, ρ s'écrit:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

On note alors $\eta_\rho := \theta$.

Proposition / Définition 23 Soient $\vec{u}, \vec{v} \in E \setminus \{0\}$. Alors $\exists! \alpha \in O^+(E)$ tel que $\alpha(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}) = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$. On note $(\vec{u}, \vec{v}) = \theta \in [0, 2\pi[$ l'angle orienté entre \vec{u} et \vec{v} .

Définition 24 (angle orienté de droite): Soient D_1, D_2 deux droites dirigées par \vec{u}_1, \vec{u}_2 . L'angle orienté entre D_1 et D_2 est (\vec{u}_1, \vec{u}_2) modulo π .

Alors G est un groupe projectif si il vérifie :

- $\forall g(P) = \xi$
 $g \in G$

- $g(P) \cap h(P) \neq \emptyset \Rightarrow g = h$

- Théorème 22 g a 5 groupes passants à conjugaison près dans $h \circ^{-1}(E)$.

III) Généralisation sur la droite projective $P^1(\mathbb{C})$

1) Groupe des homographies

Rappel: $P^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ où ∞ est une relation d'équivalence définie sur $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ par $x \sim y$ si $\exists \lambda \in \mathbb{C}^* : y = \lambda x$

Definition 23 On définit $PGL_2(\mathbb{C}) := GL_2(\mathbb{C}) / \sim$

$PGL_2(\mathbb{C}) \cong PGL_2(\mathbb{C}) \times PGL_2(\mathbb{C}) \rightarrow PGL_2(\mathbb{C})$

$([g], [\alpha]) \mapsto [g\alpha]$

où $[g]$ désigne la classe de $g \in GL_2(\mathbb{C})$ modulo les homothéties, et α désigne la classe de $\alpha \in \mathbb{C}^2$ modulo \sim .

$PGL_2(\mathbb{C})$ est appelé groupe des homographies.

Proposition 24 On identifie $P^1(\mathbb{C})$ à $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Soit $[g]$ une homographie représentée par $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$. L'action de $[g]$ sur $P^1(\mathbb{C})$ s'identifie à l'application $t \mapsto \frac{at+b}{ct+d}$.

exemple: les translations $t \mapsto t+b$, les rotations $t \mapsto e^{i\theta}t$, les homothéties $t \mapsto \lambda t$, $\lambda > 0$, et l'inversion $t \mapsto \frac{1}{t}$ sont des homographies.

Proposition 25 $PGL_2(\mathbb{C})$ est engendré par les translations, les rotations, les homothéties et l'inversion.

Proposition 26 L'action de $PGL_2(\mathbb{C})$ est 3 fois simplement transitive

[M62] p 235

ie: étant donné deux triplets de points distincts

(z_1, z_2, z_3) et (z'_1, z'_2, z'_3) dans $P^1(\mathbb{C})$, il existe une unique homographie $h \in PGL_2(\mathbb{C})$ telle que

$h(z_i) = z'_i$ pour $i = 1, 2, 3$.

2) Bi-rapport

Definition 28 Soient z_1, z_2, z_3 trois points distincts de $P^1(\mathbb{C})$, soit $z'_i \in P^1(\mathbb{C})$ quelconque. Il existe une unique homographie h telle que $h(z_i) = z'_i = 0, h(z_2) = 1, h(z_3) = \infty$. On définit le bi-rapport de (z_1, z_2, z_3, z'_1) par $[z_1, z_2, z_3, z'_1] := h(z'_1)$

Proposition 28 (i) Deux quadruplets (z_1, z_2, z_3, z'_1) et $(z''_1, z''_2, z''_3, z''_4)$ ont le même bi-rapport si et seulement si $\exists g \in PGL_2(\mathbb{C})$, $g(z_i) = z''_i$ pour $i = 1, 2, 3$ et 4.

(ii) $[z_1, z_2, z_3, z'_1] = \frac{z_3 - z'_1}{z_3 - z_2} \times \frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1}$

A l'aide de la proposition, on déduit:

Proposition 29 Le bi-rapport de 4 points est réel si et seulement si les 4 points sont cocycliques ou alignés

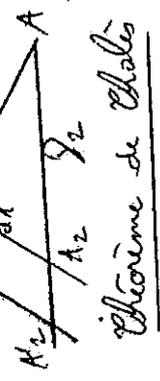
Corollaire: Soit h homographie de $P^1(\mathbb{C})$ transformant un cercle ou une droite de \mathbb{C} en un cercle ou une droite de \mathbb{C} .

[M62] p 202

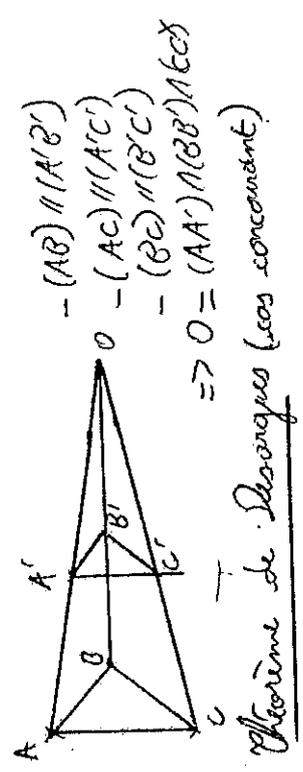
[M62] p 297

[M62] p 202

Annexe:
 $-d_1 \parallel d_2 \Rightarrow \frac{AA'_1}{AA_1} = \frac{AA'_2}{AA_2}$



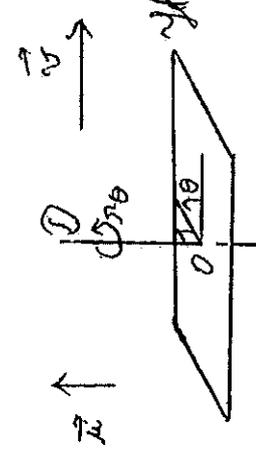
Théorème de Thalès



Théorème de Desargues (cas concourant)

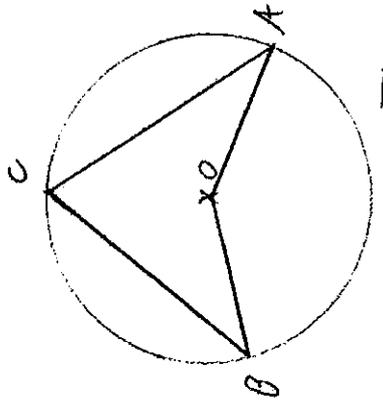
symétrie glissante:
 $M \mapsto t_{\vec{u}} \circ D_{\mathcal{H}}(M)$

$\times M$
 \perp
 \mathcal{H} symplan affine de direction H ,
 $\vec{u} \in H$



translation: $t_{\vec{u}}(M) = M + \vec{u}$
 rotation: $s_{\mathcal{H}}(M) = O + \pi_{\mathcal{H}}(OM) \circ \pi_{\mathcal{H}} \circ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée adaptée $\hat{=}$ $H \oplus R \oplus \vec{u}$
 d'où \mathcal{D} , d'angle θ
 réflexion: $s_{\mathcal{H}}(M) = O + s_{\mathcal{H}}(OM)$ où $s_{\mathcal{H}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

visage: $M \mapsto t_{\vec{u}} \circ s_{\mathcal{H}}(M)$
 symétrie glissante: $M \mapsto t_{\vec{u}} \circ D_{\mathcal{H}}(M)$
 anti-rotation: $M \mapsto s_{\mathcal{H}} \circ D_{\mathcal{H}}(M)$



Angles inscrits $(\vec{OA}, \vec{OB}) = 2(\vec{CA}, \vec{CB})$

DVPT 1 : Existence et unicité de l'ellipse de Steiner.

Théorème 1. Soit $T = ABC$ un vrai triangle du plan affine A_2 et A', B', C' les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. Il existe une unique ellipse tritangente aux points A', B' et C' que l'on appelle ellipse de Steiner de ABC .

Démonstration. :

Existence

Etape 1 : Les points A, B et C étant non alignés, ils définissent un repère du plan affine A_2 . L'existence d'une ellipse répondant au problème est évidente dans le cadre d'un triangle équilatéral $A_0B_0C_0$, le cercle inscrit au triangle répondant au problème, on va essayer de s'y ramener via l'action d'un élément du groupe affine $GA_2(\mathbb{R})$.

Etape 2 : Notons $T_0 = A_0B_0C_0$ un triangle équilatéral, il existe une unique bijection affine g telle que $g(A_0) = A, g(B_0) = B$ et $g(C_0) = C$. Il suffit en effet de définir g par $g(A_0) = A$ et $\vec{g}(\overrightarrow{A_0B_0}) = \overrightarrow{AB}, \vec{g}(\overrightarrow{A_0C_0}) = \overrightarrow{AC}$, une application linéaire bijective étant uniquement déterminée par l'envoi d'une base sur une base. L'action de $g \in GA_2(\mathbb{R})$ va ainsi permettre d'envoyer le repère affine $\{A_0, B_0, C_0\}$ sur le repère affine $\{A, B, C\}$ puis le triangle équilatéral $A_0B_0C_0$ sur le triangle ABC , ie $g(T_0) = T$.

Etape 3 : La conservation du barycentre par une application affine garantit que les milieux des côtés de ABC sont exactement les images par g des milieux des côtés de $A_0B_0C_0$.

Etape 4 : L'image d'une conique par une transformation affine (application affine bijective) étant une conique et g étant continue car affine, elle envoie le cercle \mathcal{C} inscrit dans T_0 qui est une conique compacte sur une conique compacte inscrite dans T , c'est-à-dire une ellipse que l'on note \mathcal{E} .

Etape 5 : Enfin, g étant affine, elle est différentiable, de différentielle sa partie linéaire $\vec{g} (*)$. Ainsi, g conserve la notion de tangence ie si \vec{u} est un vecteur directeur de la tangente T en un point M de \mathcal{C} , alors $dg(M)(\vec{u})$ est un vecteur directeur de la tangente à l'ellipse $\mathcal{E} = g(\mathcal{C})$ au point $g(M)$. Par définition, \mathcal{C} est tritangente au triangle $A_0B_0C_0$ aux points $A'_0 = m[B_0C_0]$, $B'_0 = m[A_0C_0]$ et $C'_0 = m[A_0B_0]$, on a donc :

- $D_1 = (A_0B_0)$ est tangente à \mathcal{C} en $C'_0 \implies \vec{g}(\overrightarrow{A_0B_0}) = \overrightarrow{AB}$ et (AB) est tangente à \mathcal{E} en $g(C'_0) = C'$.
- $D_2 = (A_0C_0)$ est tangente à \mathcal{C} en $B'_0 \implies \vec{g}(\overrightarrow{A_0C_0}) = \overrightarrow{AC}$ et (AC) est tangente à \mathcal{E} en $g(B'_0) = B'$.
- $D_3 = (B_0C_0)$ est tangente à \mathcal{C} en $A'_0 \implies \vec{g}(\overrightarrow{B_0C_0}) = \overrightarrow{BC}$ et (BC) est tangente à \mathcal{E} en $g(A'_0) = A'$.

Finalement, \mathcal{E} est une ellipse tritangente à T aux points A', B', C' .

Unicité

Méthode : d'après la partie existence, via la transformation affine $g \in GA_2(\mathbb{R})$, il suffit de démontrer l'existence d'une unique ellipse répondant au problème, lorsque le triangle est équilatéral.

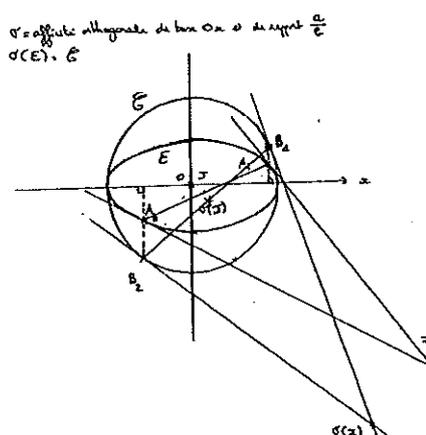
Etape 1 :

Objectif 1 : soit \mathcal{E} une ellipse du plan affine A_2 , exhibons une symétrie laissant invariante \mathcal{E} .

Soient A_1 et A_2 deux points distincts de \mathcal{E} et T_1, T_2 les tangentes à \mathcal{E} en ces points. On note également I le point d'intersection de T_1 et T_2 et J le milieu de $[A_1, A_2]$, notre objectif est alors de prouver que \mathcal{E} est invariante par la symétrie par rapport à (IJ) parallèlement à (A_1A_2) .

Pour ce faire, introduisons quelques notations. On note s la symétrie par rapport à (IJ) parallèlement à (A_1A_2) et σ l'affinité orthogonale de base (FF') de rapport a/b où F, F' sont les foyers de \mathcal{E} et b, a les longueurs respectivement du petit axe et du grand axe de \mathcal{E} . Enfin, on note s' la symétrie par rapport à $(\sigma(I)\sigma(J))$ parallèlement à $(\sigma(A_1)\sigma(A_2)) = (B_1B_2)$.

Propriétés : $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{C}$ est le cercle de rayon a centré en O , le centre de l'ellipse. Comme σ est une transformation affine, d'après la partie existence, elle préserve la tangence et on a aussi $\sigma(T_1)$ est tangente à \mathcal{C} en $B_1 = \sigma(A_1)$ et $\sigma(T_2)$ est tangente à \mathcal{C} en $B_2 = \sigma(A_2)$.



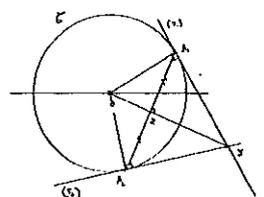
But : montrons qu'il suffit de prouver $s'(C) = C$, pour avoir $s(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$. En effet, on a :

$$s'(C) = C \implies s'(\sigma(\mathcal{E})) = \sigma(\mathcal{E}) \implies \sigma^{-1} \circ s' \circ \sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{E}.$$

Alors prouver que $s(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$, revient à montrer que $\sigma^{-1} \circ s' \circ \sigma = s$ et I, J et A_2 étant trois points non alignés, et formant un repère affine, il suffit de prouver que $\sigma^{-1} \circ s' \circ \sigma$ et s coïncident en ses 3 points. Or $s'(\sigma(I)) = \sigma(I) \implies \sigma^{-1} \circ s' \circ \sigma(I) = I = s(I)$ par définition de s, s' et de même, $\sigma^{-1} \circ s' \circ \sigma(J) = s(J)$. Enfin, par conservation du barycentre par une application affine, on a :

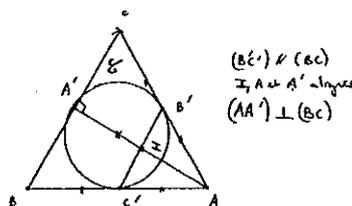
$$\sigma(J) = m[\sigma(A_1)\sigma(A_2)] \implies s'(\sigma(A_1)) = \sigma(A_2) \implies \sigma^{-1} \circ s' \circ \sigma(A_1) = A_2 = s(A_1).$$

But : montrons donc $s(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$ pour $\mathcal{E} = C(O, R)$ le cercle de centre O et de rayon R . Soient $A_1 \neq A_2 \in \mathcal{E}$ et T_1, T_2 les tangentes à \mathcal{E} en ces points et $J = T_1 \cap T_2$, $I = m[A_1A_2]$.



OA_1J et OA_2J sont rectangles en A_1, A_2 avec $OA_1 = OA_2 = R$. Par le théorème de Pythagore $JA_1 = JA_2$ et les points O, I, J sont alignés car sont sur (IJ) : la médiatrice du segment $[A_1A_2]$. Ainsi, s est la réflexion d'axe (IJ) . Comme s est une isométrie, s envoie le cercle \mathcal{E} de rayon R et de centre O sur le cercle de rayon R et de centre $s(O) = O$ car $O \in (IJ)$. D'où $s(C) = C$.

Étape 2 : montrons que le cercle inscrit \mathcal{C} est la seule ellipse répondant au problème posé dans le cas d'un triangle équilatéral ABC .



Raisonnons par l'absurde et considérons \mathcal{E} est une autre ellipse répondant au problème.

Méthode : on va prouver le résultat en montrant que \mathcal{E} admet 3 axes de symétries, donc est un cercle, ce qui donnera l'unicité par unicité du cercle inscrit d'un triangle. On a alors naturellement (AC) est tangente à \mathcal{E} en B' , (AB) est tangente à \mathcal{E} en C' et $(AB) \cap (AC) = C$ et soit $I = m[B'C']$. Par le théorème de la droite des milieux avec ABC équilatéral, on en déduit que : A, I et A' sont alignés sur la médiatrice du segment $[BC]$. Ainsi, la symétrie par rapport à $(AI) = (AA')$ parallèlement à $(B'C') \parallel (BC)$ est exactement la réflexion d'axe (AA') . D'après l'étape 2 on en déduit : $s_{(AA')}(\mathcal{E}) = \mathcal{E} \implies (AA')$ est un axe de symétrie de l'ellipse. On trouve de même que (BB') et (CC') sont des axes de symétries de l'ellipse. D'où le résultat.

Conclusion : soit $T = ABC$ quelconque, et $T_0 = A_0B_0C_0$ un triangle équilatéral. Il existe une unique transformation affine $g \in GA_2(\mathbb{R})$ telle que $g(T) = T_0$. D'après la partie existence, il existe une ellipse tritangente aux milieux des côtés de ABC que l'on note \mathcal{E} . Alors, $g(\mathcal{E})$ est une ellipse inscrite dans le triangle équilatéral $A_0B_0C_0$ tritangente aux milieux de ces côtés et d'après ce qu'on a vu précédemment $g(\mathcal{E})$ est nécessairement le cercle inscrit \mathcal{C} du triangle $A_0B_0C_0$ et :

$$\mathcal{E} = g^{-1}(\mathcal{C}) \text{ est définie de manière unique.}$$

D'où l'unicité de l'ellipse de Steiner. \square

Corollaire 1. *L'ellipse de Steiner de $T = ABC$ est un cercle $\iff T$ est équilatéral.*

Démonstration. $2 \implies 1$ a déjà été montré. Montrons donc $1 \implies 2$ et commençons par prouver que le centre de symétrie de l'ellipse de Steiner est aussi le centre de gravité du triangle ABC . Par ce qui précède, le centre de l'ellipse de Steiner G est envoyé par l'application affine g sur le centre G_0 du cercle \mathcal{C} inscrit dans le triangle équilatéral $A_0B_0C_0$ (une transformation affine envoie un centre de symétrie sur un centre de symétrie). Or G_0 est l'isobarycentre des sommets A_0, B_0 et C_0 de $A_0B_0C_0$, par conservation du barycentre par une application affine, le centre de l'ellipse de Steiner vérifie donc que G est l'isobarycentre de A, B et C , soit :

$$G \text{ est le centre de gravité de } ABC.$$

Supposons donc que l'ellipse de Steiner de ABC soit un cercle que l'on note \mathcal{C} . Le centre de l'ellipse de Steiner est d'après ce qui précède le centre de gravité du triangle ABC , or (BC) étant tangente à \mathcal{C} en $A' = m[BC]$ on a :

$$(A'G) \perp (BC) \text{ avec } G \in (AA').$$

On en déduit donc que $(A'A)$ est la médiatrice de $[BC]$ et donc par le théorème de Pythagore que $AB = AC$. On montre de même que $BC = AB$ soit $AB = AC = BC \implies ABC$ est équilatéral. \square

Explications supplémentaires : (*) Notant (O, I, J) le repère orthonormé canonique de \mathbb{R}^2 où $e = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ est la base canonique de \mathbb{R}^2 , on a :

$$g(O) = M_0 = (x_0, y_0) \text{ et } Mat_e \vec{g} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$$

soit en termes de coordonnées :

$$g(x, y) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \implies dg_{(x,y)}(h, k) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

et donc pour tout $M \in \mathbb{A}_2$, $dg(M) : \overrightarrow{OH} \longrightarrow \vec{g}(\overrightarrow{OH})$.

Rappel 1. *Une ellipse ayant au moins 3 axes de symétries distincts est un cercle.*

Références :

- Caldero et Germoni. Pour la partie existence.
- Correction du Capes de 1990 pour la partie unicité. Dany Jack Mercier.

Groupes paveurs

Références : Berger, *Géométrie 1*, p33
Cours de Madame Dal'Bo sur les pavages

Leçons : 161, 190

Définition

On se donne P un compact connexe de \mathbb{R}^2 , d'intérieur non vide, et G un sous-groupe de $Is^+(\mathbb{R}^2)$, alors G est un groupe paveur si il vérifie les conditions suivantes :

- $\bigcup_{g \in G} g(P) = \mathbb{R}^2$
- si $g(\dot{P}) \cap h(\dot{P}) \neq \emptyset \Rightarrow g = h$

Le but ici est d'étudier les groupes paveurs du plan et de montrer qu'il n'y en a que 5 à conjugaison dans $Is^+(\mathbb{R}^2)$ près.¹

On rappelle que $Is^+(\mathbb{R}^2) \simeq \mathbb{R}^2 \times SO_2(\mathbb{R})$ (isomorphisme de groupe) via l'application $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b \mapsto (b, A)$.
On note T l'ensemble des translations (les isométries de partie linéaire nulle) de $Is^+(\mathbb{R}^2)$.

Proposition

Soit $\Gamma = T \cap G$, alors Γ est un réseau de \mathbb{R}^2 , c'est à dire qu'il existe une base (\vec{u}_0, \vec{v}_0) de \mathbb{R}^2 telle que $\Gamma = t_{z\vec{u}_0 + z'\vec{v}_0}$.

Démonstration. • Si $\Gamma = \{id\}$, alors G ne contient que des rotations de centre 0. Donc si $P \subset B(0, M)$, alors $\forall g \in G, gP \subset B(0, M)$. Donc l'axiome premier des groupes paveurs n'est pas respecté.

• Soit $t_{\vec{u}} \in \Gamma$, supposons maintenant que $\forall t_{\vec{w}} \in \Gamma, \exists \lambda, \vec{w} = \lambda \vec{u}$.
Soit $r \in G \setminus \Gamma$, alors $rt_{\vec{u}}r^{-1} = t_{r(\vec{u})} \in \Gamma$. Donc $r(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$, donc r est un demi-tour autour de 0.
On en déduit que si P est inclus dans une bande passant par 0 dirigé par une droite D , alors $\forall g \in \Gamma, gP$ est toujours inclus dans cette bande, ce qui contredit l'axiome 1.



→ À partir d'ici, tout est à apprendre par cœur.

• Soit $\alpha = \inf\{\|\vec{w}\|, t_{\vec{w}} \in \Gamma \setminus \{t_{\vec{0}}\}\}$, soit $(\vec{w}_n)_n$ une suite de vecteurs telle que $t_{\vec{w}_n} \in \Gamma \setminus \{t_{\vec{0}}\}$ et qui converge vers cet infimum. À partir d'un certain rang, elle est comprise dans une boule $B(0, \alpha + \epsilon)$, donc quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $(\vec{w}_n)_n$ converge (vers \vec{v}).
On pose $g_n = t_{\vec{w}_{n+1} - \vec{w}_n}$, on a $\forall x, g_n(x) = \vec{w}_{n+1} - \vec{w}_n + x \rightarrow x$ donc $g_n \rightarrow id$ simplement. En particulier, pour n grand, $g_n(\dot{P}) \cap \dot{P} \neq \emptyset$, donc g_n est stationnaire à l'identité. Donc \vec{w}_n est stationnaire à \vec{v} . Donc $\vec{v} \in \Gamma$ et $\|\vec{v}\| = \alpha$.
Il reste cependant le cas où $\alpha = 0$. On voit que si c'est le cas, le deuxième axiome n'est pas vérifié pour une translation trop faible.

• On pose \vec{u}_0 le vecteur réalisant l'infimum. Puis on pose \vec{v}_0 tel que $\|\vec{v}_0\| = \inf\{\|\vec{w}\|, \vec{w} \text{ non colinéaire à } \vec{u}_0, t_{\vec{w}} \in \Gamma\}$. Ce vecteur existe par les mêmes arguments qu'au dessus.

1. Attention, il peut y avoir une infinité de pavés différents, c'est juste la manière de recouvrir le plan avec qui va changer!

Soit $t_{\vec{w}} \in G$, montrons que $\vec{w} \in \mathbb{Z}\vec{u}_0 + \mathbb{Z}\vec{v}_0$. On a déjà $\vec{w} = a\vec{u}_0 + b\vec{v}_0$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Par translation, on peut supposer $a, b \in [0, 1]$.

→ Si $a = b = 0$, c'est bon.

→ Si $a = 0$ et $b \neq 0$, $\|\vec{w}\| < \|\vec{v}_0\|$, ce qui contredit la minimalité de $\|\vec{v}_0\|$. C'est donc absurde.

→ Il en va de même pour le cas $a \neq 0$ et $b = 0$.

→ Si a et b sont non-nuls, alors

$$\begin{aligned} \|\vec{w}\|^2 &\leq a^2 \|\vec{u}_0\|^2 + b^2 \|\vec{v}_0\|^2 + 2ab \langle \vec{u}_0, \vec{v}_0 \rangle \\ &< a^2 \|\vec{u}_0\|^2 + b^2 \|\vec{v}_0\|^2 + 2ab \|\vec{u}_0\| \|\vec{v}_0\| \quad (\text{car } \vec{u}_0 \text{ et } \vec{v}_0 \text{ ne sont pas colinéaires}) \\ &< (a^2 + b^2 + 2ab) \|\vec{v}_0\|^2 = (a+b)^2 \|\vec{v}_0\|^2 \end{aligned}$$

On en déduit $\|\vec{w}\| < (a+b) \|\vec{v}_0\|$, donc $a+b > 1$.

En refaisant le même travail avec $\vec{w}' = (1-a)\vec{u}_0 + (1-b)\vec{v}_0$, on trouve $a+b < 1$, ce qui donne une contradiction et implique donc que $w = 0$.

Γ est donc bien un réseau. □

Théorème

Pour $G \subset Is^+(\mathbb{R}^2)$, il n'y a que 5 pavages du plan.

On rappelle que deux groupes paveurs G_1 et G_2 sont équivalents si ils sont conjugués dans $Is^+(\mathbb{R}^2)$.²

Démonstration. On appelle L l'application qui à un déplacement de G associe sa partie linéaire dans $SO_2(\mathbb{R})$. Soit $g \in G$, et $\mathcal{B} = (\vec{u}_0, \vec{v}_0)$ la base (pas forcément orthonormée) de \mathbb{R}^2 associée au réseau Γ .

On observe $\begin{cases} L(g)(\vec{u}_0) & n_1\vec{u}_0 + m_1\vec{v}_0 \\ L(g)(\vec{v}_0) & n_2\vec{u}_0 + m_2\vec{v}_0 \end{cases}$ avec $n_1, n_2, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$.

D'où, $L(g) = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix}$ dans la base \mathcal{B} . On en déduit $\text{Tr}(L(g)) = 2 \cos(\theta) \in \mathbb{Z}$.

On en déduit la disjonction des cas suivante :

→ soit $\cos(\theta) = -1$ et $L(g) = -id$,

→ soit $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$ et $L(g) = R_{\frac{2\pi}{3}}$,

→ soit $\cos(\theta) = 0$ et $L(g) = R_{\frac{\pi}{2}}$,

→ soit $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$ et $L(g) = R_{\frac{\pi}{3}}$,

→ soit $\cos(\theta) = 1$ et $L(g) = id$.

On a alors $L(G) = \langle R \rangle$ cyclique avec R rotation parmi celles citées ci-dessus.

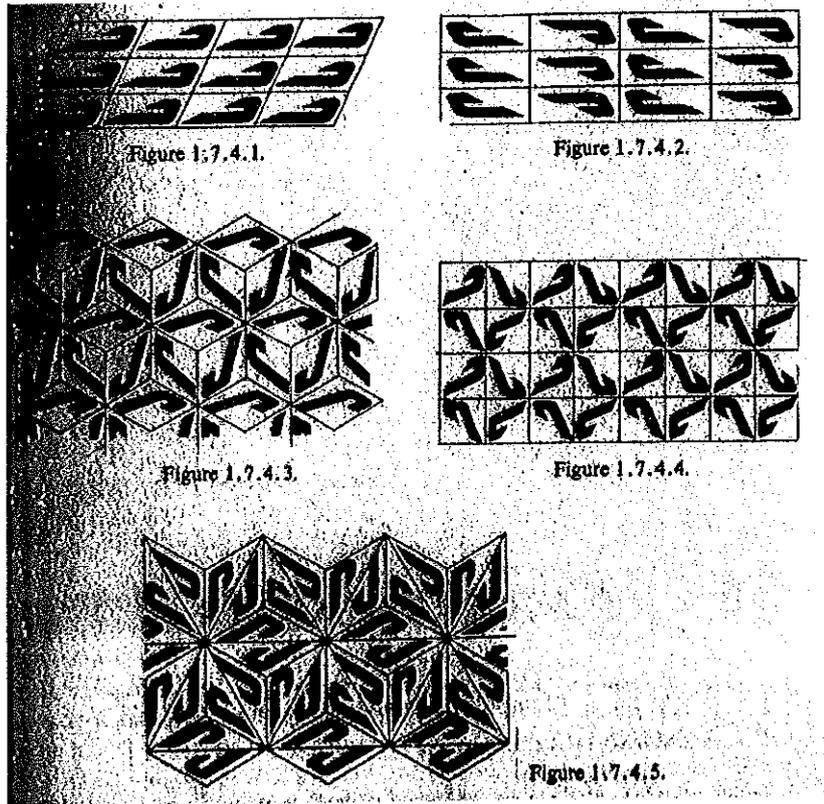
En effet, on a $L(G) \subset SO_2(\mathbb{R})$ abélien, et si on compose bien deux des rotations du dessus, on obtient des rotations interdites. Par exemple, $R_{\frac{\pi}{3}} R_{\frac{\pi}{2}} = R_{\frac{5\pi}{6}}$ est banni.

On a ainsi 5 types de groupes différents. □

Pour finir, on dessine les 5 types de pavages que voici (image prise dans Berger, *Géométrie*).

2. Dans le Audin, il est dit à ce sujet : si τ est un élément d'un groupe de transformations G , son conjugué par un élément de G est un élément de même nature géométrique que τ , et les éléments définissant cette nature sont, pour le conjugué de τ par ϕ les images de ceux de τ par ϕ .

Par exemple, $\phi \circ t_{\vec{u}} \circ \phi^{-1} = t_{\vec{\phi}(\vec{u})}$.



- Remarques :**
- Si on définit le groupe paveur comme un sous groupe de $Is(\mathbb{R}^2)$, on a alors 17 groupes paveurs possibles. La première démonstration de ce fait a été trouvée à Saint-Petersbourg en 1891 par Evgraf Stepanovitch Fedorov (à ne pas confondre avec Stéphane Arkadiévitch Oblonski). On peut trouver des précisions très claires et passionnantes sur le site de Thérèse Eveilleau : http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/jeux_mat/textes/pavage_17_types.htm
 - Le palais de l'Alhambra à Grenade est rempli de pavages différents. Il contient 13 des pavages périodiques du plan.
 - Il n'y a pas que des pavages périodiques! Même si il est assez difficile de s'imaginer un pavage apériodique, ils existent! On peut citer les pavages de Penrose notamment.
 - En cristallographie, on étudie les symétries dans les cristaux avec la déviation de faisceaux lumineux par diffraction. On trouve ainsi des 'mailles élémentaires' (notre pavé) et des 'groupes d'espace' qui sont exactement nos groupes paveurs (mais en dimension 3). On peut montrer qu'il y a 230 types de groupes d'espace.
 - Si on a un groupe paveur G opérant sans point fixe, on peut montrer que $X = \mathbb{R}^2/G$ est une variété différentielle. Pour $L(G) = \langle id \rangle$, on a $G = \mathbb{Z}^2$ et on trouve $X = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ le tore. On peut aussi trouver la bouteille de Klein pour un pavage que nous n'avons pas étudié ici.