Utilisation des groupes en géométrie.

183

I - Géométrie affine : Soit E un k espace vectoriel, k corps.

I-1 Espace affine associé à un espace vectoriel :

def 1 : On appelle espace affine, un ensemble $\mathcal{E}$ sur lequel le groupe additif $(E, +)$ d'un espace vectoriel agit à droite, transitivement et librement. Les éléments de $\mathcal{E}$ sont appelés des points, ceux de E les vecteurs. Si $\dim E < +\infty$ $\dim E$ est appelé dimension de l'espace affine $\mathcal{E}$. Si $A, B \in \mathcal{E}$: $\overrightarrow{AB}$ est l'unique vecteur de E tel que $B = A + \overrightarrow{AB}$.

prop 2 : $\forall A, B, C \in \mathcal{E}$; points de l'espace affine on a la relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

- $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$; $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

cor 3 : Les translations $t_{\vec{x}} : M \longmapsto M + \vec{x}$ constituent un sous-groupe du groupe $S_{\mathcal{E}}$, isomorphe à E.

def 4 : Soit F un sous-espace vectoriel de E. On restreint l'action de E sur $\mathcal{E}$ à F. Les orbites pour cette action sont appelées sous espaces affines de $\mathcal{E}$ de direction F.

I-2 Groupe affine et sous-groupes :

def 5 : Soient E, E' deux k espaces vectoriels, $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ deux espaces affines sur $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ respectivement.
$f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'$ est dite affine s'il existe une application linéaire $\vec{f} : E \longrightarrow E'$ telle que :
$\forall M \in \mathcal{E} : \forall \vec{x} \in E$ $f(M + \vec{x}) = f(M) + \vec{f}(\vec{x})$

. On note $Aut(\mathcal{E})$ l'ensemble des isomorphismes affines $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$.

prop 6 : Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application. Les conditions suivantes sont équivalentes :
(1) f est une translation.
(2) f est affine et $\vec{f} = Id_E$.
(3) f commute avec toute translation.

app 7 : (i) $(Aut(\mathcal{E}), \circ)$ est un groupe.
(ii) $\nu : f \in Aut(\mathcal{E}) \longrightarrow \vec{f} \in GL(E)$ est un homomorphisme de groupes, surjectif.
(iii) Le noyau de ν est l'ensemble T des translations de $\mathcal{E}$. C'est un sous-groupe commutatif maximal et distingué de $Aut(\mathcal{E})$.

th 8 : On pose $H := \{ f \in Aut(\mathcal{E}) \mid \exists \lambda \in k^* ; \vec{f} = \lambda Id_E \}$
(1) H est un sous-groupe distingué de $Aut(\mathcal{E})$.
(2) Le groupe T des translations est un sous-groupe distingué de H.
(3) $\forall A \in \mathcal{E}$, le groupe H_A des homothéties de centre A est un sous-groupe de H, et les sous-groupes $(H_B)_{B \in \mathcal{E}}$ sont conjugués de H_A.
(4) H est réunion de T et des sous groupes $(H_A)_{A \in \mathcal{E}}$

ex 9 : Soit $f \in Aut(\mathcal{E})$. $R = (A, \vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ un repère (ie $A \in \mathcal{E}$ et $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ base de E) si R et $f(R) = (f(A), \vec{f}(e_1), \dots, \vec{f}(e_n))$ sont de même orientation on dit que f est direct.
. L'ensemble $(Aut(\mathcal{E}))^+$ des automorphismes affines directs de $\mathcal{E}$ est un sous groupe distingué d'indice 2 de $Aut(\mathcal{E})$.

II - Géométrie affine euclidienne : $\dim E = n$

II-1 Le groupe orthogonal euclidien :

def 10 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. $O(E)$ est l'ensemble des isométries ie endomorphismes qui vérifient :

- $\forall x, y \in E \quad \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.
- $O^+(E)$ est l'ensemble des isométries telles que $\det(f) = 1$.

th 11 : • $O(E)$ est engendré par les réflexions orthogonales. Plus précisément, si $u \in O(E)$ u est produit d'au plus n réflexions.

• Pour $n \geq 3$ $O^+(E)$ est engendré par les renversements, et tout élément $u \in O(E)$ est produit d'au plus n renversements.

th 12 : $u \in O(E)$. $E = V \overset{\perp}{\oplus} W \overset{\perp}{\oplus} P_1 \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} P_r$; $r \geq 0$

V, W, P_i sous-espaces stables par u, avec $u_{|V} = Id_V$, $u_{|W} = -Id_W$; $u_{|P_i}$ est une rotation plane, distincte de $\pm Id_{P_i}$. Matriciellement $Mat_{\mathcal{B}}(u) \sim \begin{pmatrix} I_p & & & & \\ & -I_q & & & \\ & & R_{\theta_1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & R_{\theta_r} \end{pmatrix}$

app 13 : • $O^+(E)$ est connexe par arc.

• $GL^+(\mathbb{R})$ est connexe par arc.

prop 14 : $O^+(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \ a, b \in \mathbb{R} : a^2 + b^2 = 1 \right\}$

et $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \longrightarrow & O^+(2, \mathbb{R}) \\ a+ib & \longmapsto & \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \end{array}$ est un isomorphisme de groupe, où $\mathcal{U} = \{ z \in \mathbb{C}^* : |z| = 1 \}$

Rq 15 : On peut munir la sphère $\mathbb{S}^1$ d'une structure de groupe.

th 16 : L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, +) & \longrightarrow & (\mathcal{U}, \times) \\ t & \longmapsto & e^{it} \end{array}$ est un homomorphisme de groupe surjectif, de noyau $2\pi\mathbb{Z}$ qui induit un isomorphisme de groupes topologiques de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ sur $\mathcal{U}$.

def 17 : Soit $R(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \in O(2, \mathbb{R})$, t image de $t \in \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ s'appelle l'angle de $R(t)$ et $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ s'appelle groupe des angles.

th 18 : Soit H l'ensemble des quaternions, on définit la norme $N(q) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, où $q = a + ib + jc + kd \in H$. On pose $G := \{ q \in H : N(q) = 1 \}$. Alors :

$G \simeq \mathbb{S}^3$ (homéomorphe) et on a un isomorphisme $\bar{\mathcal{S}} : G/\{-1, 1\} \xrightarrow{\sim} O^+(3, \mathbb{R})$

DEV ①

II-2 Application à l'étude des isométries affines :

def 19 : Soient $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ deux espaces affines euclidiens (E, E' munis d'une structure euclidienne). Une isométrie f est une application qui conserve la distance ie : $\forall A, B \in \mathcal{E} \quad \|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{f(A)f(B)}\|$.

th 20 : Si $\mathcal{E}$ est euclidien, $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) f est une isométrie.

(2) f est une application affine et $\vec{f} \in O(E)$.

def 21 : On note $Is(\mathcal{E})$ l'ensemble des isométries de $\mathcal{E}$. Si $\det(\vec{f}) = 1$ (-1) on dit que f est un déplacement (respectivement un anti-déplacement). On note $Is^+(\mathcal{E})$ l'ensemble des déplacements.

th 22: Si $f \in Is(\mathcal{E})$, il existe $g \in Is(\mathcal{E})$ unique ayant un point fixe, et $\vec{u} \in \operatorname{Ker}(\vec{f} - Id)$ uniques tels que $f = g \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ g$.

th 23: Si f est une isométrie de $\mathcal{E}$ f est le produit de p réflexions (symétries orthogonales par rapport à un hyperplan) avec $p \leq n+1$.
Si $\dim(\mathcal{E}) = n$ et $s = \dim(\operatorname{Ker}(\vec{f} - Id))$ alors:
si f a un point fixe : $p = n - s$.
si f n'a pas de point fixe $p = n - s + 2$

app 24: Les reflexions sont des générateurs de $Is(\mathcal{E})$

II - 3 Groupes d'isométries laissant stable une figure

prop 25: Soit $X \subseteq \mathbb{R}^3$ une partie finie. $Is(X) := \{g \in Is(\mathbb{R}^3) : g(X) = X\}$
Si O est un centre de symétrie de X et $g \in Is(X)$ alors $g(O) = O$ et $Is(X) \simeq Is^+(X) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

ex 26: Les groupes d'isométries d'un tétraèdre régulier Δ_4 sont : $Is(\Delta_4) \simeq S_4$.
$Is^+(\Delta_4) \simeq A_4$.

ex 27: Les groupes d'isométries du cube sont $Is^+(C_6) \simeq S_4$; $Is(C_6) \simeq S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

III - Constructions à la règle et au compas:

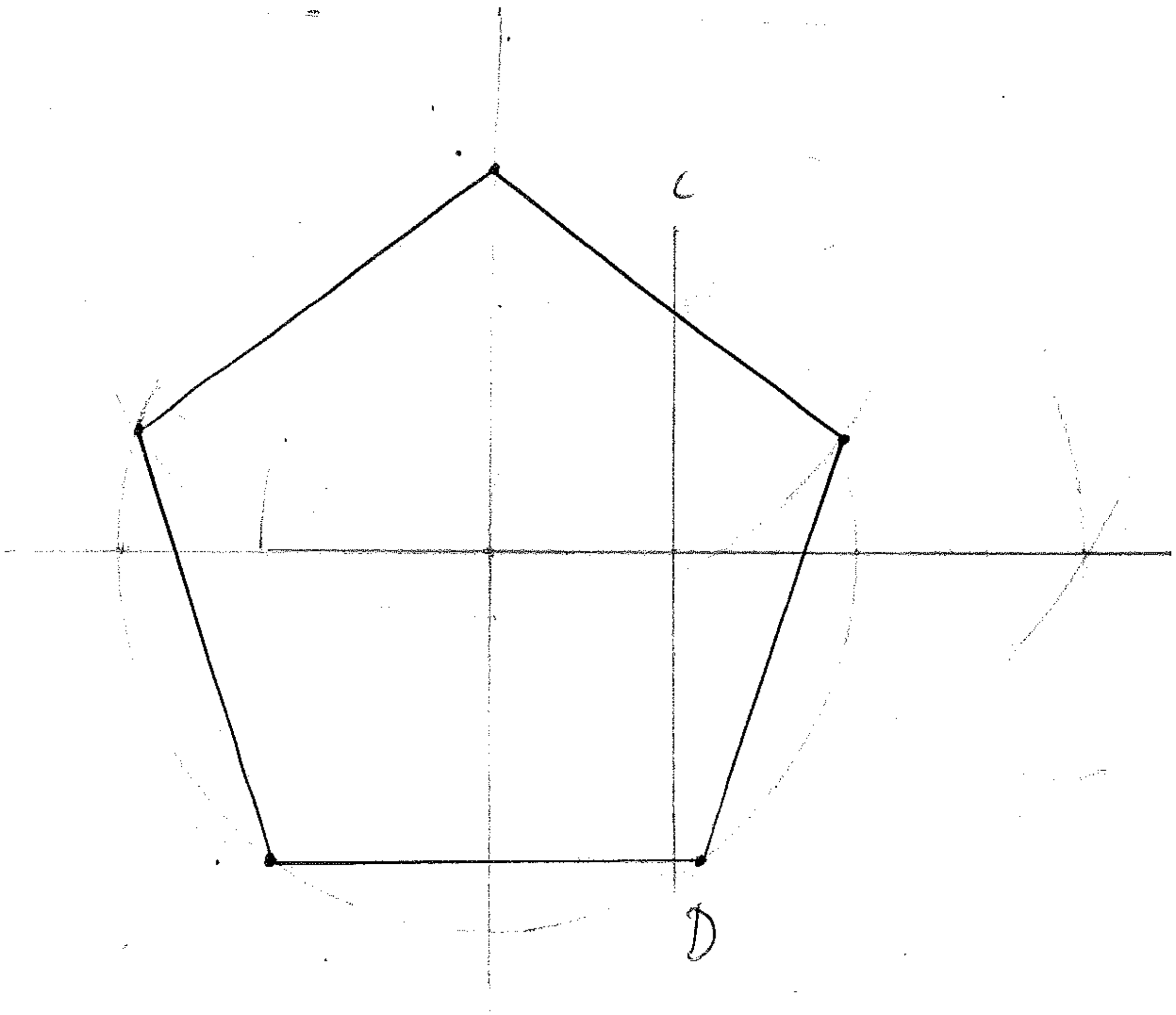
Contexte 28: On munit le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ des points: $O = (0,0)$ et $I = (1,0)$. Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ une partie. On considère les trois types de figures construites à partir de A :
(1) Les droites affines $\langle P, Q \rangle$, pour $P, Q \in A$, $P \neq Q$.
(2) les cercles centrés en $P \in A$, passant par $Q \in A$ avec $P \neq Q$.
(3) les cercles centrés en $P \in A$, de rayon $\|QR\|$, avec $Q, R \in A$, $Q \neq R$.

déf 29: Soit $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $M \in \mathbb{R}^2$. On dit que M est constructible en un pas à la règle et au compas s'il existe deux éléments distincts droites ou cercles de type (1),(2) ou (3) dont M soit un point d'intersection.
. Un point $M \in \mathbb{R}^2$ est dit constructible s'il existe une suite $A_0 \subset \ldots \subset A_n$ de parties de $\mathbb{R}^2$ telles que: a) $A_0 = \{O, I\}$; b) $M \in A_n$ c) $A_i = A_{i-1} \cup \{M_i\}$ où M_i est constructible en un pas à partir de A_{i-1}. Un nombre $x \in \mathbb{R}$ est dit constructible si $(x, 0)$ l'est.

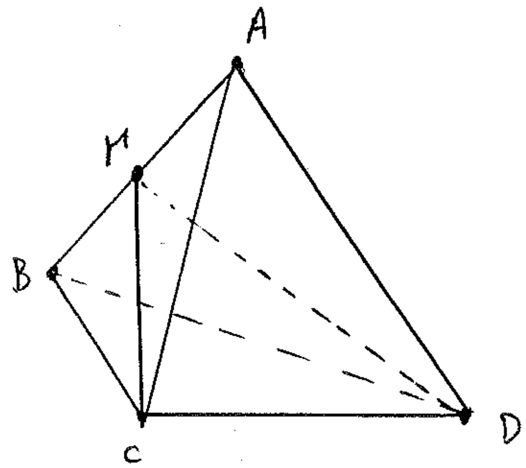
th 30: Soit $x \in \mathbb{R}$ constructible. Alors x est algébrique sur $\mathbb{Q}$ et $[\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}] = 2^r$.
Réciproquement: soit $x \in \mathbb{R}$. si $\mathbb{Q}(x)/\mathbb{Q}$ est galoisienne et $[\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}] = 2^r$, alors x est constructible.

App 31: Le polygone régulier à n côtés ($n \geq 3$) est constructible à la règle et au compas si et seulement si : $n = 2^s p_1 \ldots p_r$, avec p_i nombres premiers de Fermat 2 à 2 distincts.

DEV ②



Groupes d'isométries du cube et du tétraèdre:



I. Géométrie affine euclidienne

I.1. Classificaⓞ

I.2. Applications: ~~...~~ O(E).

On aurait aussi pu ajouter:

. la géométrie projective et le groupe des homographies (birapport)

. le groupe des similitudes.

Plan: I - Géométrie affine

I.1 Espace affine associé à un espace vectoriel

I.2 Groupes affines et sous-groupes.

II - Géométrie affine euclidienne

II-1 Le groupe orthogonal euclidien

II-2 Application à l'étude des isométries affines.

II-3 Groupe d'isométrie laissant stable une figure.

III - Construction à la règle et au compas.

Référence . Perrin Cours d'algèbre → dev ①

. H_2G_2 : Tome premier. Bernoi, Caldero.

. Algèbre et géométrie. François Combes.

. Géométrie. Audin.

. Théorie de Galois: J.P. Escofier ~~...~~

. Géométrie affine et euclidienne. C. Delode.