123 Utilisation des groupes en géométrie.

Pré-requis : Actions de groupes.

Cadre : E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie où $\mathbb{K}$ est un corps commutatif de caractéristique nulle.

I- Géométrie affine

A- Espace et groupe affine.

Définition 1 : [2] Un espace affine $\mathcal{E}$ est un ensemble munit d'une action libre et transitive du groupe sous-jacent à un espace vectoriel $\vec{E}$. La dimension est celle de $\vec{E}$.

Interprétation 2 : [1] Un espace affine $\mathcal{E}$ est la donnée d'un ensemble $\mathcal{E}$, d'un ev E et d'une application $\theta : \begin{array}{l} \mathcal{E}\times\mathcal{E} \to E \\ (a,b) \mapsto \vec{ab} \end{array}$ tq
* $\forall a \in \mathcal{E}$, l'application partielle θ_a est une bijection
* θ vérifie la relation de Chasles.

Exemples 3 : [1] * $\emptyset$ est un espace affine
* Tout ev a une structure d'espace affine.

Définition 4. [2] Un sous-ensemble $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ est un sous-espace affine si $\mathcal{F} = \emptyset$ ou s'il contient $a \in \mathcal{F}$ tel que $\mathcal{F} = \theta_a(F)$ est un sev de $\vec{E}$.

Définition 5 : [1] Une application $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est dite affine s'il existe un point O dans $\mathcal{E}$ et une application linéaire $\vec{f} : \vec{E} \to \vec{F}$ telle que $\forall M \in \mathcal{E}$, $\vec{f}(\vec{OM}) = \overrightarrow{\phi(O)\phi(M)}$.

Exemples 6 : [1] homothéties ; translations.

Définition 7 : [2] Le groupe affine $GA(\mathcal{E})$ est l'ensemble des bijections affines de $\mathcal{E}$ (pour la loi de composition).

B- Invariants du groupe affine.

Proposition 8 : [1] L'image d'un sous-espace affine par une transformation affine est un sous-espace affine.

Interprétation 9 : [1] Le groupe affine préserve l'alignement.

Définition 10 : Si $(a_1,\alpha_1),\dots,(a_n,\alpha_n)$ est un système de points pondérés tels que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$, alors il existe un unique point g, appelé barycentre, tel que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{ga_i} \neq 0$. [2]

Proposition 11 : [1] Une application est affine ssi elle conserve les barycentres.

Interprétation 12 : [1] Le groupe affine préserve les barycentres.

C- Classifications des figures affines.

* **Figures issues des triplets de $\mathbb{R}^2$.**

Proposition 13 : [4] Le groupe affine de dimension 2 sur $\mathbb{R}$ agit simplement et transitivement sur les triplets de $\mathbb{R}^2$.

Application 14 : [4] (L'ellipse de Steiner). Soient ABC un triangle du plan (non plat) et A', B', C' les milieux des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. Alors, il existe une ellipse tritangente aux points A', B', C'. (Figure 1 en annexe).

* **Figures issues des sous-espaces affines.**

Proposition 15. [3] Soit $\mathcal{E}$ de dimension 2 et $\mathcal{D}$ l'ensemble des droites de $\mathcal{E}$. Le groupe affine de $\mathcal{E}$ opère sur $\mathcal{D}\times\mathcal{D}$, non-transitivement et définit trois orbites :
* l'orbite des couples de droites d'intersections vides ;
* l'orbite des couples de droites confondues ;
* l'orbite des couples de droites d'intersection réduite à 1 point.

Définition 16 : [1] Deux sous-espaces affines sont parallèles s'ils ont le même sev sous-jacent.

Interprétation 17. [1] Le groupe affine préserve le parallélisme.

* **Figures issues d'un espace affine de dimension $d \geq 2$, $\mathcal{E}$.**

Proposition 18 : [3] Le groupe affine de $\mathcal{E}$ agit sur $\mathcal{E}^3$ et les orbites sont
* une orbite pour tous les triplets de points non alignés ;
* les orbites de points alignés, 2 à 2 distincts, paramétrés par $\mathbb{K}\setminus\{0\}$
* l'orbite des points confondus (pour un triplet) ;
* l'orbite des triplets de points dont deux sont confondus.

Définition 19 : [3] Le rapport de trois points alignés (a,b,c) avec $(a \neq b)$ est $k \in \mathbb{K}$ tel que $\vec{ac} = k\vec{ab}$ et on note $k = \frac{\vec{ac}}{\vec{ab}}$.

Application 20 : [2] (Théorème de Thalès). Soient H_1, H_2 et H_3 trois hyperplans parallèles et distincts. Soit $\mathcal{D}$ une droite non parallèle à ces hyperplan. Pour $i = 1,2,3$, on note $a_i = \mathcal{D}\cap H_i$. Le rapport de (a_1,a_2,a_3) ne dépend pas de la droite $\mathcal{D}$.
(Figure 2 en annexe).

II- Géométrie affine euclidienne.

A- Espace affine euclidien et groupe des isométries.

Définition 21: [1] On appelle espace affine euclidien tout espace affine réel E dont le ev sous-jacent $\vec{E}$ est muni du produit scalaire canonique. On note d la distance sous-jacente.

Définition 22: [1] Une isométrie de E est une application $f: E \to E$ qui conserve les distances : $\forall a, b \in E$, $d(f(a), f(b)) = d(a, b)$.

Exemples 23: [1] translations ; rotations ; réflexions ; symétries.

Définition 24: [3] L'ensemble des isométries, noté $Is(E)$ est un groupe, sous-groupe du groupe affine de E.

Proposition 25: [3] f est une isométrie ssi f est affine et $\vec{f} \in O(E)$ où $O(E)$ est le groupe orthogonal de E.

B- Générateurs du groupe des isométries.

Définition 26: [1] Une réflexion est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan. C'est bien une isométrie.

Théorème 27: [1] Soit E un espace affine de dimension n. Toute isométrie de E peut s'écrire comme composée de p réflexions pour $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $p \leq n+1$.

Corollaire 28: [1] Les générateurs du groupe des isométries sont les réflexions.

Application 29: [1] Les isométries du plan sont exactement les rotations, les réflexions et les symétries glissées.

C- Invariants par le groupe des isométries (en dimension 2).

Définition 30: [1] f est une isométrie positive si $\vec{f}$ a un déterminant positif.

Définition 31: [2] Un angle orienté de droites du plan est une classe d'équivalence de l'ensemble des couples des droites sous l'action du groupe des isométries positives du plan.

Interprétation 32: [2] Les angles orientés sont les invariants du groupe des isométries.

Application 33: [2] Dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, la matrice de rotation $r \in O_2^+(\mathbb{R})$ est donnée par un élément $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ par la formule : $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Le paramètre θ est l'angle de la rotation.

Remarque 34: [2] Les angles orientés entre deux demi-droites se définissent de la même manière que les angles orientés entre deux droites.

Définition 35: [2] La mesure d'un angle orienté entre deux demi-droites de même origine du plan affine est le paramètre $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ de l'unique rotation r qui envoie la première demi-droite sur la deuxième.

Application 36: [2] La somme des angles d'un triangle du plan affine euclidien est égal à π.

D- Stabilisateurs par le groupe des isométries (en dimension 2 et 3).

Définition 37: [1] Un polygone convexe est dit régulier si tous ses côtés et tous ses angles sont égaux.

Définition 38: Le groupe diédral est engendré par les rotations et les réflexions.

Proposition 39: [2] Le groupe diédral D_{2n} préserve les polygones à n côtés.

Définition 40: [4] Dans $\mathbb{R}^3$, un solide platonicien est un polyèdre de dimension 3, convexe et régulier (faces identiques et régulières).

Théorème 41: [4] (ADMIS) Il existe exactement 5 solides platoniciens.

Exemples 42: Tétraèdre, Cube, Octaèdre, Dodécaèdre, Isocaèdre.

Définition 43: [4] Le groupe des isométries d'une partie $X \subset \mathbb{R}^3$, est le sous-groupe de $Is(\mathbb{R}^3)$ qui stabilise X.

Théorème 44: $Is(\text{tétraèdre}) \simeq \mathfrak{S}_4$ [4]

Théorème 45: [4] $Is^+(\text{cube}) \simeq \mathfrak{S}_4$ où Is^+ est le groupe des isométries positives.

Application 46: Il y a 57 manières différentes de colorier un cube avec 3 couleurs. DEV

III Géométrie projective.

A- Espace projectif et groupe projectif.

Définition 47 : [3] Soit H le groupe des homothéties vectorielles de E. H opère sur E et l'espace projectif est l'espace des orbites : $P(E) = (E\setminus\{0\})/H$

Interprétation 48 : [1] L'espace projectif de E est l'ensemble des droites vectorielles de E.

Exemple 49 : La sphère de Riemann est la droite projective $P_1(\mathbb{C})$. [1]

Théorème 50 (Pappus) : Soient D et D' deux droites, A, B, C trois points de D et A', B', C' trois points de D'. Soient α, β, γ les points d'intersections de $B'C$ et $C'B$; $A'C$ et AC' ; et $A'B$ et $B'A$. Alors α, β, γ sont alignés. (Figure en annexe). [1].

Définition 51 : [1] Une homographie entre deux espaces vectoriels E et E' est une application $g : P(E) \to P(E')$ telle qu'il existe un isomorphisme linéaire $f : E \to E'$ tel que $p' \circ f = g \circ p$.

Exemple 52 : [1] Sur $P_1(\mathbb{R})$, $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ (avec $ad - cb \neq 0$).

Définition 53 : [1] Les homographies de $P(E)$ dans lui-même forment un groupe (composition), le groupe projectif de E.

B- Invariants du groupe projectif.

Définition 54 : [1] Soient a, b, c, d quatre points dans $P(E)$ tels que a, b, c sont distincts 2 à 2 et alignés. Le birapport $[a,b,c,d]$ est l'image de d par l'unique homographie qui envoie a sur ∞, b sur 1 et c sur 0.

Exemples 55 : [1] $[a,b,c,a] = \infty$; $[a,b,c,b] = 1$ et $[a,b,c,c] = 0$.

Proposition 56 : [1] Le birapport est un invariant du groupe projectif.

Proposition 57 : [1] Soient a, b, c, d quatre points d'une droite affine de $P(E)$ tels que $(a \neq b \neq c)$. Alors $[a,b,c,d] = \frac{d-b}{d-a} \Big/ \frac{c-b}{c-a}$

Proposition 58 (Alternative de Steiner) : [2] On considère deux cercles $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ tels que $\mathcal{C}'$ est inclus dans $\mathcal{C}$. On peut alors construire une suite de cercle tangeant $\mathcal{C}_n$ tel que $\forall n$, $\mathcal{C}_n$ soit tangeant à $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}$. Alors, il existe ou non m_0 tel que $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_{m_0}$ tel que cela ne dépend que de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ et non du choix de $\mathcal{C}_0$. (Figure en annexe).

C- Groupe circulaire.

Définition 59 : [1] Le groupe circulaire est le sous-groupe de $P_1(\mathbb{C})$ qui préserve les droites et les cercles.

Théorème 60 : [1] Les générateurs du groupe circulaire sont les homographies et la conjugaison complexe. DEV

Lemme 61 : [1] Les angles de droites (CA, CB) et (DA, DB) sont égaux ssi les 4 points sont cocycliques ou alignés.

IV Quaternions et géométrie

Définition 62 Il existe une algèbre $\mathbb{H}$ de dimension 4 sur $\mathbb{R}$ appelée algèbre des quaternions, munie d'une base $1, i, j, k$ telle que
1) 1 est le neutre pour la multiplication.
2) $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $jk = -jk = i$, $ki = -ik = j$, $ij = -ij = -k$

Définition 63 Soit $q \in \mathbb{H}$, $\exists (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tels que $q = a + ib + jc + kd$

On note $\overline{q} \in \mathbb{H}$, $\overline{q} = a - ib - jc - kd$ le conjugué de q.

$q \mapsto \overline{q}$ est un anti morphisme ; ie est linéaire et $\forall q_1, q_2 \in \mathbb{H}$, $\overline{q_1 q_2} = \overline{q_2}\,\overline{q_1}$

Définition 64 L'application $N : \mathbb{H} \to \mathbb{R}^+$, $a + ib + jc + kd \mapsto a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ vérifie $N(q) = \|q\|_2^2$ en voyant q comme $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$.
En particulier $q \mapsto \sqrt{N(q)}$ est une norme.

Prop 65 $\mathbb{H}$ est un corps (non commutatif), dont le centre est $\{a.1 \mid a \in \mathbb{R}\}$

App 66 Soit $G = \{q \in \mathbb{H}, N(q) = 1\}$ muni de la multiplication est un groupe isomorphe à $SU_2(\mathbb{C})$ le groupe des automorphismes unitaires de $\mathbb{C}^2$ avec $\varphi : G \to SU_2(\mathbb{C})$

$$a + ib + jc + kd \mapsto \begin{pmatrix} a+ib & -\overline{(c+id)} \\ c+id & \overline{a+ib} \end{pmatrix}$$

App 67 On a $G/\{\pm 1\} \simeq SO_3(\mathbb{R})$ DEV

Remarque 68 Cet isomorphisme permet d'identifier le calcul de l'image des rotations de $\mathbb{R}$ à des produits dans $\mathbb{H}$.

Annexe :

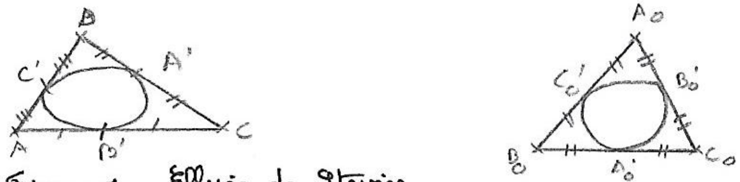

Figure 1 : Ellipse de Steiner.

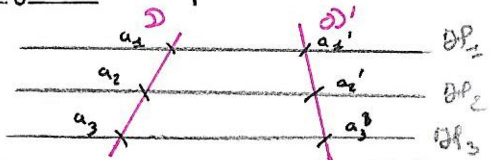

Figure 2 : Théorème de Thalès.

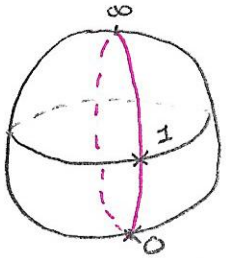

Figure 3 : La droite $P_1(\mathbb{R})$ dans $P_1(\mathbb{C})$, la sphère de Riemann

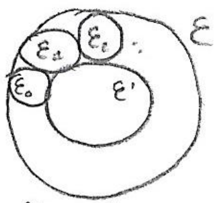

Figure 4 : L'alternative de Steiner.

Références :

[1] Audin, Géométrie
[2] Boyer, Algèbre et géométrie
[3] Ladegaillerie, Géométrie pour le capes et l'agrégation
[4] Caldero - Germoni, Histoires hédonistes de groupes et de géométries, tome 1.
[5] Perrin - Cours d'algèbre
[6] Ramis, Warusfel et Moulin - Cours de mathématiques pures et appliquées, Volume 1 Algèbre et Géométrie.