191

Exemples d'utilisation des techniques d'algèbre en géométrie.

I. UTILISATION DES COMPLEXES EN GÉOMÉTRIE AFFINE PLANE

1) Modélisation du plan par $\mathbb{C}$

Prop 1: Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}=(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$. L'application φ qui associe à tout nombre complexe $z=x+iy$ le point $\varphi(z)$ de coordonnées $(x;y)$ dans le repère $\mathcal{R}$ réalise une bijection de $\mathbb{C}$ sur $\mathcal{P}$.

Déf 2: Le plan $\mathcal{P}$ muni de cette identification est appelé plan complexe ou plan d'Argand-Cauchy.
Si $M\in\mathcal{P}$ s'écrit $M=\varphi(z)$, on dit que z est l'affixe de M et M le point image de z.

Ex 3: Si z et z' désignent les affixes respectives des points M et M' de $\mathcal{P}$, alors:
- $Re(z\bar{z'}) = xx'+yy'$ est égal au produit scalaire $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'}$
- $Im(\bar{z}z') = xx'-yy'$ est égal au déterminant de $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'})$ dans la base $(\vec{e_1},\vec{e_2})$

Prop 4: Soient A,B,C,D 4 points distincts de $\mathcal{P}$ d'affixes a,b,c,d. Alors:
- A,B,C sont alignés ssi $\frac{b-a}{c-a}\in\mathbb{R}$ ssi $(b-a)(\bar{c}-\bar{a})\in\mathbb{R}$.
- les droites (AB) et (CD) sont orthogonales ssi $(b-a)(\bar{d}-\bar{c})\in i\mathbb{R}$ ssi $\frac{b-a}{d-c}\in i\mathbb{R}$.

Prop 5: L'aire d'un triangle de sommets A,B,C d'affixes a,b,c distincts est:
$\mathcal{A}ire(ABC) = \left|\frac{1}{2}Im((b-a)(\bar{c}-\bar{a}))\right| = \frac{1}{4}\left|\begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1\\ b & \bar{b} & 1\\ c & \bar{c} & 1\end{vmatrix}\right|$

Cor 6: La droite passant par A et B distincts d'affixes a et b a pour équation $\begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1\\ b & \bar{b} & 1\\ z & \bar{z} & 1\end{vmatrix}=0$.

Prop 7: Soit A,B,C trois points distincts d'affixes a,b,c. Alors ABC est équilatéral ssi j ou $\bar{j}$ est racine de $az^2+bz+c=0$.

2) Module et argument pour l'étude de droites et de cercles dans le plan complexe

Prop 8: Soient A,B,Ω trois points de $\mathcal{P}$ d'affixes a,b,ω.
- Le cercle de centre Ω et de rayon $\rho\geq 0$ a pour équation $|z-\omega|=\rho$.
- Si $A\neq B$, la médiatrice du segment $[AB]$ a pour équation $|z-a|=|z-b|$.

Thm 9: Toute équation de la forme $\alpha z\bar{z}+\bar{\beta}z+\beta\bar{z}+\gamma=0$ où $\alpha,\gamma\in\mathbb{R}$ et $\beta\in\mathbb{C}$ représente:
- $\mathbb{C}$ tout entier si $\alpha=\beta=\gamma=0$
- l'ensemble vide si $(\alpha=\beta=0$ et $\gamma\neq 0)$ ou si $(\alpha\neq 0$ et $\frac{|\beta|^2}{\alpha^2}-\frac{\gamma}{\alpha}<0)$.
- une droite dirigée par le vecteur d'affixe $i\beta$ si $\alpha=0$ et $\beta\neq 0$.
- le cercle de centre $-\frac{\beta}{\alpha}$ et de rayon $\sqrt{\frac{|\beta|^2}{\alpha^2}-\frac{\gamma}{\alpha}}$ si $\alpha\neq 0$ et $\frac{|\beta|^2}{\alpha^2}-\frac{\gamma}{\alpha}\geq 0$

Cor 10: Soient $A\neq B$ deux points de $\mathcal{P}$ d'affixes a,b et $\lambda>0$ un réel. L'ensemble $E=\{z\in\mathbb{C},\ |z-b|=\lambda|z-a|\}$ est:
- la médiatrice de $[AB]$ si $\lambda=1$
- le cercle de centre $\frac{b-\lambda^2 a}{1-\lambda^2}$ et de rayon $\frac{\lambda|a-b|}{|1-\lambda^2|}$ si $\lambda\neq 1$.

Thm 11: Soit A,B,C,D des points 2 à 2 distincts d'affixes a,b,c,d. Ces points sont alignés ou cocycliques ssi $\frac{c-b}{c-a}\frac{d-a}{d-b}$ est réel.

Thm 12: Soient A,B deux points distincts de $\mathcal{P}$ d'affixes a,b et $\lambda\in\mathbb{R}$, alors l'ensemble $E_\lambda=\{z\in\mathbb{C}\setminus\{a;b\},\ \arg\left(\frac{a-z}{b-z}\right)\equiv\lambda[\pi]\}$ est:
- la droite (AB) privée de A et B si $\lambda\equiv 0[\pi]$.
- le cercle de centre $\omega=\frac{a+b}{2}-i\cotan(\lambda)\frac{b-a}{2}$ de rayon $R=\frac{1}{|\sin(\lambda)|}\left|\frac{b-a}{2}\right|$ privé de A et B si $\lambda\not\equiv 0[\pi]$.

II. UTILISATION DES MATRICES EN GÉOMÉTRIE VECTORIELLE

1) Repérage d'un vecteur, et formules de changement de base

Rq 13: Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n et $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. À chaque $x\in E$, on associe un vecteur colonne, noté $X_\mathcal{B}$, dont les éléments sont les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$.

Déf 14: Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n, $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ et $\mathcal{B}'=(e_1',\dots,e_n')$ deux bases de E. Pour $j\in[\![1;n]\!]$, on peut écrire $e_j'=\sum_{i=1}^{n}p_{i,j}e_i$. La matrice $P=(p_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq n}$ s'appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et est notée $P_\mathcal{B}^{\mathcal{B}'}$.

Thm 15: (Changement de base): Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Alors: pour tout $x\in E$, on a $X_\mathcal{B}=P_\mathcal{B}^{\mathcal{B}'}X_{\mathcal{B}'}$

2) Étude matricielle des isométries vectorielles de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$.

Déf 16: Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension finie. On appelle isométrie vectorielle toute application $f\in\mathcal{L}(E)$ qui conserve la norme, ie telle que $\|f(x)\|=\|x\|$, $\forall x\in E$. On note $O(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles.

Prop 17: Si $f\in O(E)$ et $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E, alors: $Mat_\mathcal{B}(f)\in O_n(\mathbb{R}):=\{A\in M_n(\mathbb{R}),\ {}^tAA=I\}$.

Prop 18: Si $f\in O(E)$ alors $\det(f)=\pm 1$.

Déf 19: Les isométries vectorielles de déterminant 1 (resp -1) sont dites directes (resp. indirectes). On note $SO(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles directes et $SO_n(\mathbb{R}):=\{A\in O_n(\mathbb{R}),\ \det(A)=1\}$ l'ensemble des matrices d'isométries vectorielles directes dans une base orthonormée.

Prop 20: (Étude de $O_2(\mathbb{R})$): Soit $A\in O_2(\mathbb{R})$ alors:
- Soit $A\in SO_2(\mathbb{R})$ et dans ce cas $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ et A représente la rotation d'angle θ modulo 2π (voir figure)
- Soit $A\notin SO_2(\mathbb{R})$ et alors $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$ et A représente la symétrie par rapport à la droite d'angle polaire $\theta/2$ modulo 2π (voir figure).

Prop 21: (Étude de $O_3(\mathbb{R})$): Soit $A\in O_3(\mathbb{R})$ et $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $A=Mat_\mathcal{B}(f)$ où $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Il existe alors une base $\mathcal{B}'$ orthonormée de $\mathbb{R}^3$ telle que $Mat_{\mathcal{B}'}(f)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon\end{pmatrix}$ où $\varepsilon=1$ si $\det A=1$ ie si $A\in SO_3(\mathbb{R})$. et $\varepsilon=-1$ si $\det A=-1$ ie si $A\notin SO_3(\mathbb{R})$.

Prop 22: Soit $A\in O_3(\mathbb{R})$, $A\neq\pm I_3$.
- Si $\det A=1$, A représente dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, une rotation autour

de l'axe $E_1 := \mathrm{Ker}(A - I_3)$, l'angle non-orienté de rotation est donné par : $\mathrm{Tr}(A) = 2\cos\theta + 1$.
- Si $\det A = -1$, A représente dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ une rotation autour de l'axe $E_{-1} = \mathrm{Ker}(A + I_3)$ suivie de la symétrie orthogonale par rapport au plan $E_{-1}^{\perp}$, l'angle non orienté de rotation est donné par $\mathrm{Tr} A = 2\cos\theta - 1$.

En particulier, si $\mathrm{Tr}(A) = 1$, on a $\theta = 0$ et A représente la symétrie orthogonale par rapport au plan $E_{-1}^{\perp}$, dite aussi réflexion par rapport à $E_{-1}^{\perp}$. (voir figure).

<u>Rq23</u>: Pour déterminer l'orientation de l'angle de rotation, on prend $\vec{n}$ qui oriente E_1 (ou E_{-1}) et $\vec{u} \notin E_1$ (ou E_{-1}), on a alors $\mathrm{sgn}(\sin\theta) = \mathrm{sgn}(\det(\vec{u}, f(\vec{u}), \vec{n}))$.

<u>Ex24</u>: La matrice $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in SO_3(\mathbb{R})$ représente une rotation autour de l'axe orienté par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$ modulo 2π.

III – OUTILS POLYNOMIAUX POUR L'ÉTUDE DE COURBES, DE SURFACES, DE VOLUMES

1) Interprétation géométrique du déterminant

<u>Thm25</u>: Dans le plan P, l'aire du parallélogramme engendré par deux vecteurs v et w vaut $\mathcal{A}(v,w) = |\det(v,w)|$.

<u>Thm26</u>: Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et $X \subset \mathbb{R}^n$ une partie mesurable. Alors $\lambda(u(X)) = |\det(u)|\,\lambda(X)$.

<u>Cor27</u>: Soit $v_1, \dots, v_n$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on note $P(v_1, \dots, v_m)$ le parallélépipède engendré par $v_1, \dots, v_m$, ie l'ensemble $\{w \in \mathbb{R}^n, w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ avec $\lambda_i \in [0;1], \forall i \in [\![1;n]\!]\}$. Alors $\lambda(P(v_1, \dots, v_m)) = |\det(v_1, \dots, v_m)|$.

<u>App28</u>: (Inégalité de Hadamard) : Pour tous vecteurs $v_1, \dots, v_n$ de $\mathbb{R}^n$, on a :
$$|\det(v_1, \dots, v_n)| \leq \prod_{i=1}^{n} \|v_i\|,$$
avec égalité si les v_i forment une famille orthogonale. Autrement dit, le volume d'un parallélépipède P est maximal ssi P est un parallélépipède rectangle.

<u>Déf29</u>: On munit $\mathbb{R}^p$ du produit scalaire canonique $\langle .,. \rangle$. Soit $v_1, \dots, v_n$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. La matrice de Gram de $v_1, \dots, v_m$ est $MG(v_1, \dots, v_m) = (\langle v_i, v_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq n}$ et le déterminant de Gram est $G(v_1, \dots, v_n) = \det(MG(v_1, \dots, v_m))$.

<u>Prop30</u>: La distance d d'un vecteur $x \in \mathbb{R}^p$ à un sous espace F de dimension m, de base $(v_1, \dots, v_m)$, vaut : $d^2 = \dfrac{G(v_1, \dots, v_m, x)}{G(v_1, \dots, v_m)}$

<u>Rq31</u>: $G(v_1, \dots, v_p)$ est le volume du parallélépipède $P(v_1, \dots, v_p)$ de $\mathbb{R}^p$.

2) Les formes quadratiques pour l'étude des coniques et des quadriques

<u>Déf32</u>: Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie. Une application $q : E \to \mathbb{R}$ est dite forme quadratique réelle si étant donnée une base $(e_1 \dots e_n)$ de E, $q(x)$ est un polynôme homogène de degré 2 en les composantes x_i de x dans la base $(e_1 \dots e_n)$.

<u>Déf33</u>: Soit $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique. La forme bilinéaire symétrique $s : E \times E \to \mathbb{R}$ donnée par $s(x;y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$ est appelée forme polaire associée à q.

<u>Déf34</u>: On appelle noyau de q l'ensemble $N(q) = \{x \in E, s(x;y) = 0 \; \forall y \in E\}$.
- On appelle rang de q l'entier $r = \dim E - \dim(N(q))$.
- q est dite non-dégénérée si si $N(q) = \{0\}$.
- q est dite positive si $q(x) \geq 0 \; \forall x \in E$ et définie si $q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- On appelle cône isotrope l'ensemble $I(q) = \{x \in E, q(x) = 0\}$.

<u>Thm35</u>: (de Sylvester) : Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension n, et q une forme quadratique sur E. Il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ alors $q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2$, où $r = \mathrm{rang}(q)$ et p ne dépend pas de la base.

<u>Déf36</u>: Le couple $(p, r-p)$ noté $\mathrm{sign}(q)$ est appelé signature de q.

<u>Déf37</u>: Soit q une forme quadratique non nulle et φ une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$. On appelle conique l'ensemble $\mathcal{C}$ des $v \in \mathbb{R}^2$ tels que : $q(v) + \varphi(v) = k$ où $k \in \mathbb{R}$.

<u>Thm38</u>: Soit $\mathcal{C}$ une conique définie par l'équation $q(v) + \varphi(v) = k$. On suppose que $\mathcal{C} \neq \emptyset$ et $\mathcal{C}$ ne se réduit pas à un point. Alors :
- Si $\mathrm{sign}(q) = (2,0)$ alors $\mathcal{C}$ est une ellipse.
- Si $\mathrm{sign}(q) = (1,1)$ alors $\mathcal{C}$ est une hyperbole qui peut dégénérer en 2 droites non parallèles.
- Si $\mathrm{sign}(q) = (1,0)$ alors $\mathcal{C}$ est une parabole qui peut dégénérer en 1 droite ou en 2 droites parallèles. (voir figure).

<u>Déf39</u>: Soit q une forme quadratique non nulle et φ une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$. On appelle quadrique l'ensemble $\mathcal{Q}$ des $v \in \mathbb{R}^3$ tels que $q(v) + \varphi(v) = k \in \mathbb{R}$.

<u>Thm40</u>: Soit $\mathcal{Q}$ une quadrique ($\neq \emptyset$ et non réduite à un point) d'équation $q(v) + \varphi(v) = k$.

1. Si $rg(q) = 3$:
   - si $\mathrm{sign}(q) = (3,0)$, $\mathcal{Q}$ est un ellipsoïde
   - si $\mathrm{sign}(q) = (2,1)$, $\mathcal{Q}$ est :
     - soit un hyperboloïde à une nappe $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\right)$
     - soit un cône $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0\right)$
     - soit un hyperboloïde à 2 nappes $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1\right)$
2. Si $rg(q) = 2$: alors $\mathcal{Q}$ est :
   - soit un paraboloïde elliptique
   - soit un paraboloïde hyperbolique
   - soit un cylindre pouvant dégénérer en 2 plans non parallèles.
3. Si $rg(q) = 1$: alors $\mathcal{Q}$ est soit un cylindre parabolique, soit $\mathcal{Q}$ dégénère en 2 plans parallèles (éventuellement confondus) (voir figure).

IV – UTILISATION DE CERTAINS GROUPES ET CORPS

1) Groupe des isométries affines conservant une partie

<u>Déf41</u>: Soit P une partie d'un espace affine euclidien orienté E. On note $IS(P)$ (resp. $IS^+(P)$, $IS^-(P)$) l'ensemble formé par les isométries affines (resp. les déplacements, les antidéplacements) de E qui laissent P globalement invariante.

<u>Thm42</u>: $(IS(P), \circ)$ est un groupe et $IS^+(P)$ est un sous-groupe de $IS(P)$.
- Si $s \in IS^-(P)$, l'application $IS^+(P) \to IS^-(P)$, $f \mapsto s \circ f$ est une bijection.

<u>Thm43</u>: Soit $P = \{A_1, \dots, A_n\}$ une partie finie de E. Alors l'application :
$\Phi : IS(P) \to S_n$, $f \mapsto \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_n \\ f(A_1) & \cdots & f(A_n) \end{pmatrix}$ est un morphisme de groupe.

<u>Ex44</u>: Pour un triangle T quelconque, $IS(T) = \{Id\}$, si T isocèle, $IS(T) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, si T est équilatéral, $IS(T) = S_3$.

<u>Ex45</u>: Pour un polygône régulier à n côtés, $IS(P) = D_n$ et $IS^+(P) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Prop46 : Soit Δ_4 un tétraèdre régulier. Alors $Is(\Delta_4) \simeq S_4$ et $Is^+(\Delta_4) \simeq \mathfrak{A}_4$.
Prop47 : Soit C_6 un cube. Alors $Is^+(C_6) \simeq S_4$ et $Is(C_6) \simeq S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

2) Constructions géométriques à la règle et au compas

Déf48 : Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien. Soit X une partie de $\mathcal{P}$. On considère :
a) les droites affines (AB), $(A,B) \in X^2$, $A \neq B$.
b) les cercles $\mathcal{C}(A, \|AB\|)$, $(A,B) \in X^2$, $A \neq B$.
On dit que $M \in \mathcal{P}$ est constructible en un pas à partir de X ssi il existe 2 éléments distincts droites ou cercles, de type a) ou b) dont M soit un point d'intersection.
Déf49 : Un point $M \in \mathcal{P}$ est dit constructible s'il existe une suite $A_0 \subset \dots \subset A_n$ de parties de $\mathcal{P}$ telles que : • $A_0 = \{0, I\}$ • $M \in A_n$ • $A_i = A_{i-1} \cup \{M_i\}$ où M_i est constructible en 1 pas à partir de A_{i-1}
Ex50 : Si A, B, C distincts sont constructibles alors : la perpendiculaire et la parallèle à (AB) passant par C le sont aussi.
Déf50 bis : $x \in \mathbb{R}$ est constructible ssi $(x,0)$ l'est ssi $(0,x)$ l'est. Ex : $\mathbb{Q}$ est constructible.
Prop51 : $M = (x,y)$ est constructible ssi x et y le sont.
Thm52 : L'ensemble des nombres réels constructibles est un sous-corps de $\mathbb{R}$.
Thm53 : (de Wantzel) : $x \in \mathbb{R}$ est constructible ssi il existe une suite finie $(L_0, L_1, \dots, L_p)$ de sous-corps de $\mathbb{R}$ vérifiant : • $L_0 = \mathbb{Q}$ et $x \in L_p$
• $\forall i \in [\![0, p-1]\!]$, L_{i+1} est une extension quadratique de L_i.
Cor54 : Si $x \in \mathbb{R}$ est constructible alors $[\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}] = 2^e$ où $e \in \mathbb{N}$.
Prop/Déf55 : Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors $A_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$ est constructible ssi $\cos\theta$ l'est ssi $\sin(\theta)$ l'est.
Dans ce cas, on dit que l'angle θ est constructible.
Déf56 : On dit que le polygone régulier à n côtés est constructible si l'angle $\frac{2\pi}{n}$ l'est.
Thm57 : Soit $p \geq 3$ un nombre premier, $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Le polygone régulier à p^α côtés est constructible ssi ($\alpha = 1$ et p est un nombre premier de Fermat, (ie de la forme $2^{2^n}+1$).] DEV 1

3) Utilisation des quaternions

Déf58 : On appelle corps des quaternions, noté $\mathbb{H}$ l'algèbre de dimension 4 sur $\mathbb{R}$ ayant pour base $(1, i, j, k)$ dans laquelle la multiplication est définie par : $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ et $ijk = -1$.
Prop59 : 1 est neutre et $ij = k = -ji$, $jk = i = -kj$ et $ki = j = -ik$.
Déf60 : On note $\mathbb{I}$ le sous-espace de $\mathbb{H}$: $\mathbb{I} = \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$. Les éléments de $\mathbb{I}$ sont appelés imaginaires.
Déf61 : Soit $h = x + yi + zj + tk \in \mathbb{H}$. On appelle conjugué de h, et on note $\bar{h}$ le quaternion $\bar{h} = x - yi - zj - tk$. On appelle norme de h le quaternion $N(h) = h\bar{h}$.
Prop62 : • Si $h = x + yi + zj + tk$ alors $N(h) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \in \mathbb{R}$.
• $\forall h, h' \in \mathbb{H}$, $N(hh') = N(h)\,N(h')$.
Prop63 : $N : \mathbb{H}^\times \to \mathbb{R}_+^\times$ est un morphisme de groupe dont le noyau sera appelé groupe des quaternions de norme 1 et noté G.
Prop64 : Le centre $\mathbb{H}$ est $\mathbb{R}$.
Rq65 : Tout comme $\mathbb{C}$ permet de résoudre des problèmes de géométrie plane, $\mathbb{H}$ permet de travailler sur la géométrie en dimension 3 et 4.
Thm 66 : Soit G le groupe des quaternions de norme 1.
On a un isomorphisme : $G/\{\pm 1\} \simeq SO_3(\mathbb{R})$] DEV 2
Rq67 : Dans les ordinateurs les quaternions sont utilisés pour représenter les rotations de l'espace.

V. UTILISATION D'UN ESPACE PROJECTIF POUR TRANSFORMER UN PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE

1) Espace projectif

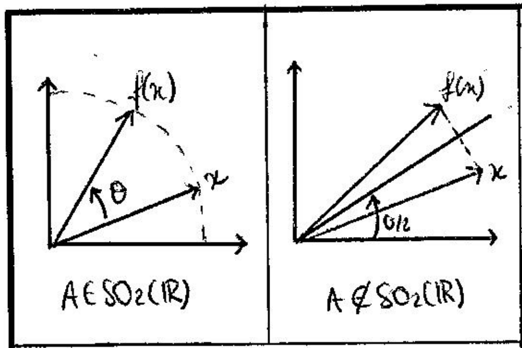
Déf68 : Soit E un ev de dimension finie. L'espace projectif $\mathbb{P}(E)$ est l'ensemble des droites vectorielles de E. On notera $\mathbb{P}_n(\mathbb{K}) = \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$.
Déf69 : La dimension de $\mathbb{P}(E)$ est $\dim(E) - 1$.
Ex70 : Si $\dim(E) = 1$ (resp. 2, 3), $\mathbb{P}(E)$ est un point (resp. droite, plan) projectif(ve).
Déf71 : Une partie V de $\mathbb{P}(E)$ est un sous-espace projectif si elle est l'ensemble des droites vectorielles contenues dans un sev F de E.
Prop72 : Soit V et W deux sous-espaces projectifs de $\mathbb{P}(E)$.
1) Si $\dim V + \dim W \geq \dim \mathbb{P}(E)$ alors $V \cap W \neq \emptyset$. En particulier, 2 droites projectives se coupent toujours.
2) Soit H un hyperplan projectif de $\mathbb{P}(E)$ et m un point hors de H. Toute droite passant par m coupe H en un et un seul point.
Prop 73 : $\mathbb{P}_1(\mathbb{K}) \simeq \{(z, 1), z \in \mathbb{K}\} \cup \{(1, 0)\} \simeq \mathbb{K} \cup \{\infty\}$. (voir figure)
$\mathbb{P}_2(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^2 \cup \mathbb{P}_1(\mathbb{K})$.
Rq74 : Dans un espace projectif, on peut "choisir" l'hyperplan à l'infini : on choisit un hyperplan F de E et on retire à $\mathbb{P}(E)$ l'hyperplan projectif $\mathbb{P}(F)$ en "l'envoyant" à l'infini.
Thm75 (Pappus) : Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites, A, B, C 3 points de $\mathcal{D}$ et A', B', C' trois points de $\mathcal{D}'$. Soit α, β, γ les points d'intersection de $B'C$ et $C'B$, CA' et $A'C$, $A'B$ et $B'A$ respectivement. Alors α, β et γ sont alignés. (voir figure)
Thm76 (Desargues) : Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles. Soient α, β, γ les points d'intersection de BC et $B'C'$, CA et $C'A'$, AB et $A'B'$. Si α, β, γ sont alignés alors AA', BB' et CC' sont concourantes. (voir figure)

2) Dualité projective

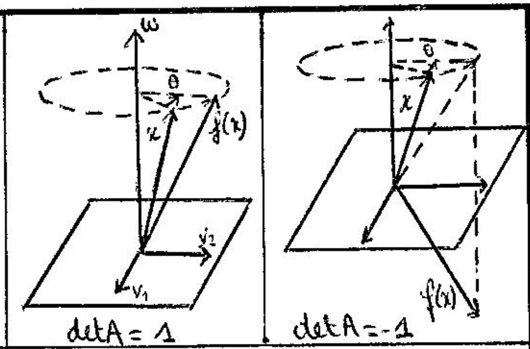
Déf/Prop77 : Soit F un sev de E. On considère le sev F° du dual E^*, $F^\circ = \{\varphi \in E^* \mid \varphi_{|F} = 0\}$.
C'est l'ensemble des formes linéaires qui s'annulent sur F. On a $\dim F^\circ = \dim E - \dim F$.
Prop78 : Si F et G sont 2 sev de E, $F \subset G \Rightarrow G^\circ \subset F^\circ$.
Prop79 : On a, si $\dim E = 3$: (voir figure).

$\mathbb{P}(E)$	E	E^*	$\mathbb{P}(E^*)$
$a \in \mathbb{P}(E)$ point	$a \subset E$ droite vect.	$a' \subset E^*$ plan vect.	$\mathbb{P}(a')$ droite projective
$D = \mathbb{P}(d)$ droite projective	$d \subset E$ plan vect.	$d' \subset E^*$ droite vect.	$d' \in \mathbb{P}(E^*)$ point

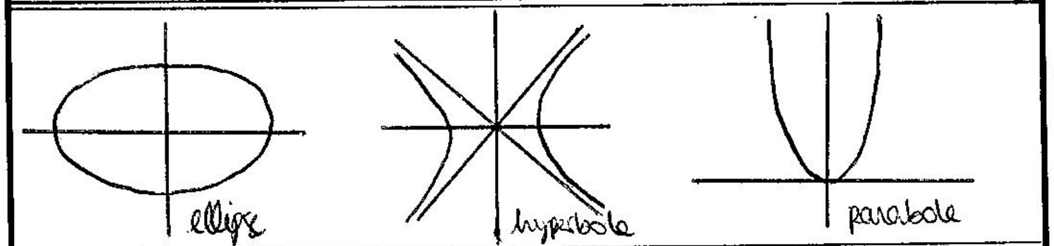
Cor80 : Ainsi trois droites concourantes "deviennent" trois points alignés.
Rq81 : C'est ainsi qu'on prouve la réciproque du théorème de Desargues (thm 76).



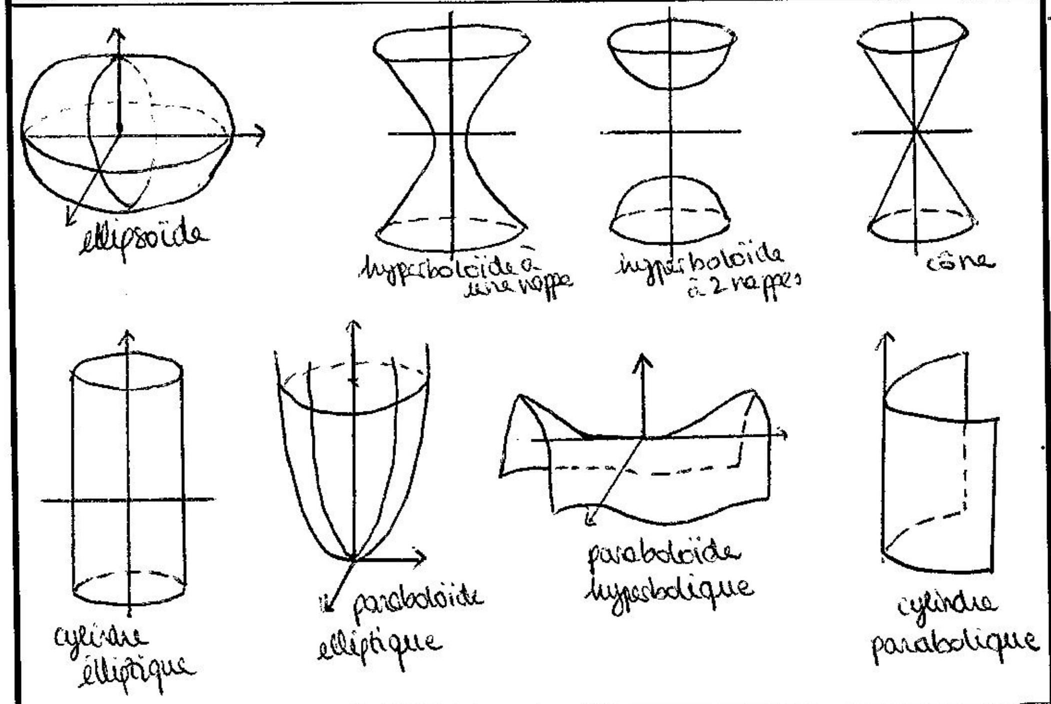
PROP.20



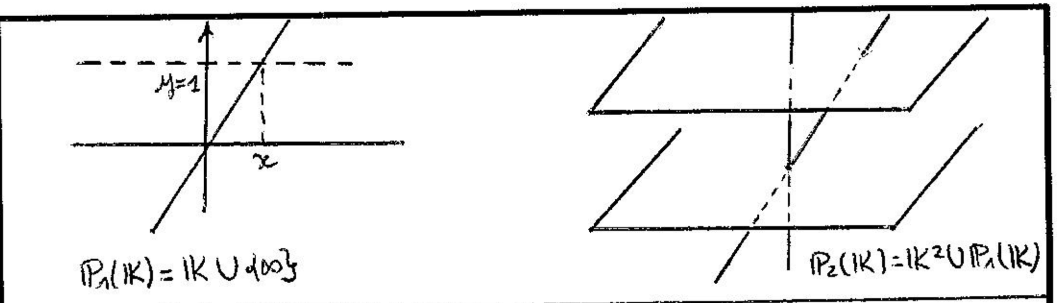
PROP22



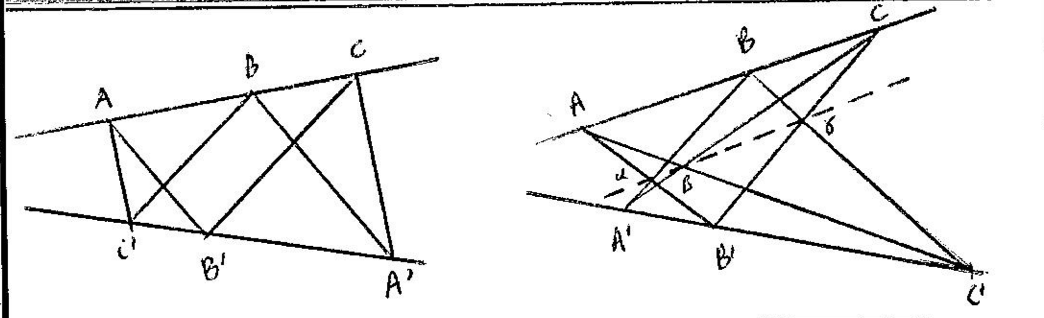
THM 38



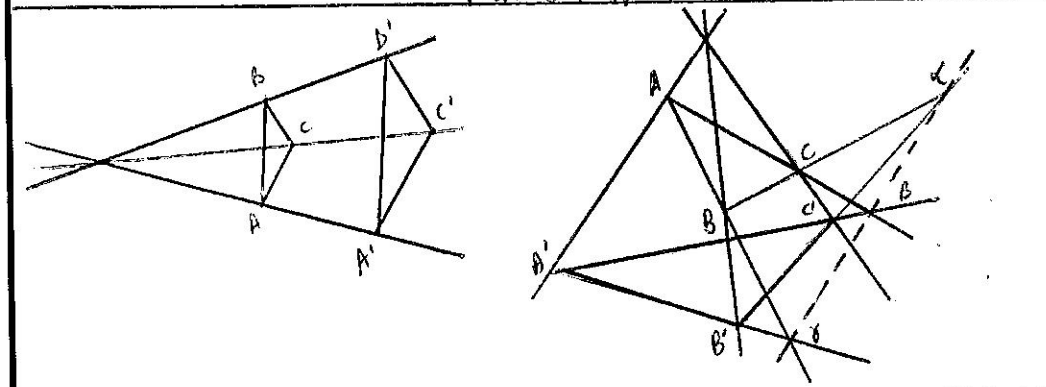
THM40



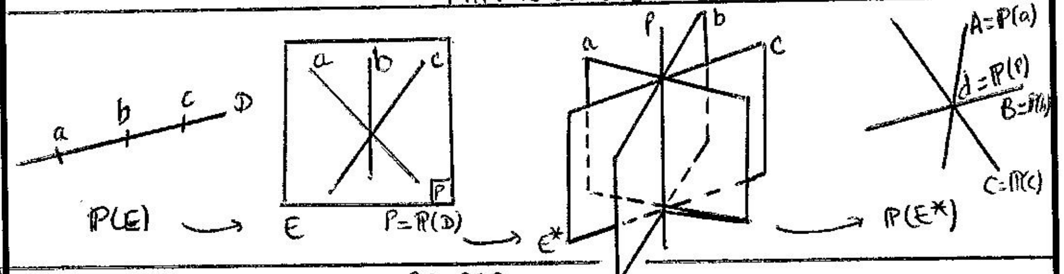
PROP 73



THM75 (Pappus)



THM76 (Desargues)



PROP79: