191 : Exemples d'utilisation de techniques d'algèbre en géométrie.

I Isométries d'un espace euclidien

a) cas général

On notera E un espace euclidien de dimension n.

Def 1: On appelle isométrie de E une application $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\forall x \in E, \|x\| = \|f(x)\|$ ou, de manière équivalente, $\forall x, y \in E, \langle x, y\rangle = \langle f(x), f(y)\rangle$.
L'ensemble des isométries de E est noté $O(E)$.

Prop 2: $O(E)$ est un groupe pour la composition

Esc 3 : Une réflescion sur un hyperplan est une isométrie.

Prop 4: Soit $F \subset E$ un sous espace vectoriel, soit $\varphi \in O(E)$.
Alors si F est stable par φ, $F^{\perp}$ aussi.

Thm 5: Soit $\varphi \in O(E)$, il esciste $R_1, \dots, R_p$ des reflescions, avec $p \leq n$, telles que $\varphi = R_1 \circ R_2 \circ \dots \circ R_p$

Def 6 : Une isométrie est positive si son déterminant l'est.
On note $O^+(E)$ le groupe des isométries positives, et $O^-(E)$ les autres.

Ex 7: Une rotation est dans $O^+(E)$, une reflescion sur un hyperplan dans $O^-(E)$.

Prop 8: Soit $\varphi \in O(E)$. Toute décomposition de φ en reflescions a la même parité.
Si $\varphi \in O^+(E)$, il en faut un nombre pair, et impair sinon.

Prop 9: Les isométries sont escactement les applications linéaires représentées par des matrices orthogonales.

Thm 10: Soit M une matrice orthogonale, alors il esciste une base orthogonale de E sur laquelle M s'écrit:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & 0 & & & & & R_1 & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & R_k \end{pmatrix}$$

où les R_i sont des matrices de rotation de dimension 2 :
$$\begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{pmatrix}$$

Prop 11 : - $O(E)$ est compact.
- Le centre de $O(E)$ est $\{id, -id\}$
- $O(E)$ est composé de deux composantes connexes : $O^+(E)$ et $O^-(E)$

b) Cas de dimension 3.

Thm 10 : $O^+(\mathbb{R}^3)$ est un groupe simple.

Def 11 : On appelle algèbre des quaternions, noté $\mathbb{H}$, l'algèbre sur $\mathbb{R}$ de base $\{1, i, j, k\}$ vérifiant :
- 1 est élément neutre
- $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$

Def 12 : Si $q = a + bi + cj + dk$, son conjugué est $\bar{q} = a - bi - cj - dk$ et on pose $N : \mathbb{H} \to \mathbb{R}^+$ la norme $N(q)^2 = q\bar{q}$

Thm 13: $O^+(\mathbb{R}^3)$ est isomorphe à $\mathbb{H}/\{-1, 1\}$

Def 14: On dit que $\varphi \in O(\mathbb{R}^3)$ fixe $S \subset \mathbb{R}^3$ si $\varphi(S) \subset S$

Thm 15: Les isométries qui fixent le tétraèdre forment un groupe isomorphe à $\mathfrak{S}_4$.

Thm 16 : Les $\varphi \in O^+(\mathbb{R}^3)$ qui fixent le cube sont isomorphes à $\mathfrak{S}_4$, $\{\varphi \in O(\mathbb{R}^3) \mid \varphi \text{ fixe le cube}\} \simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. $\boxed{\text{DEV1}}$

Thm 17 : $\{\varphi \in O(\mathbb{R}^3) \mid \varphi \text{ fixe le dodécaèdre}\} \simeq \mathfrak{S}_5$.

II Figures constructibles.

Problème 18 : On considère $\mathbb{R}^2$, A une partie de $\mathbb{R}^2$. Un point est constructible en un pas à partir de A s'il est une intersection entre deux figures qui sont :
- Soit une droite passant par $P, Q \in A$
- Soit un cercle de centre $O \in A$ et de rayon $\|PQ\|$, $P, Q \in A$.

Def 19 : Un point M est constructible si il existe $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n$, $A_1 = \{(0,0),(0,1)\}$ et $A_i = A_{i-1} \cup \{M_i\}$, M_i constructible en un pas à partir de A_{i-1}, et $P \in A_n$.

$x \in \mathbb{R}$ est constructible si $(0,x)$ l'est.

Prop 20 : Les points : $(n,0)$, $n \in \mathbb{N}$, sont constructibles. Si a et $b \in \mathbb{R}$ sont constructibles, $a+b$, ab, $a-b$ et a/b, quand $b \neq 0$, sont constructibles.
$\sqrt{a}$, si $a \in \mathbb{R}^+$ et est constructible, est constructible.

Thm 21 : Soit $x \in \mathbb{R}$ constructible. Alors x est algébrique sur $\mathbb{Q}$, et son degré est une puissance de 2.

Contre-Ex 22 : la réciproque est fausse, racines de $X^d - X - 1$

Ex 23 : Les réels $2^{1/3}$; e ; π ne sont pas constructibles (admis).

Corollaire 24 : La trisection de l'angle, la duplication du cube et la quadrature du cercle sont impossibles à construire.

Thm 25 (Gauss) : Pour qu'un polygone régulier soit constructible, il faut et il suffit qu'il ait $2^k p_1 \cdots p_m$ côtés, avec $p_1 \cdots p_m$ des premiers de Fermat distincts

Thm 26 (Mohr-Mascheroni) : Un nombre est constructible à la règle et au compas s'il l'est au compas seul.

Prop 27 : C'est faux pour la règle seule.

III Déterminants

a) Propriétés géométriques du déterminant.

Thm 28 : Soient $(v_1, \dots v_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$. On note $Vol(v_1, \dots, v_n)$ le volume du parallélépipède engendré par $v_1, \dots, v_n$:
$\{z \in \mathbb{R}^n \mid z = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n,\ 0 \leq \lambda_i \leq 1\}$ illustration en annexe.

On a $Vol(v_1, \dots, v_n) = |\det(v_1, \dots, v_n)|$

Def 29 : Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases d'un ev de dimension finie. On dit que $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ ont la même orientation si le déterminant de $P_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$ est positif.

Remarque 30 : L'orientation définit une relation d'équivalence.

Prop 31 : L'ensemble $\mathbb{B}$ des base est union disjointe de deux classes d'orientations.

Def 32 : Un espace est orienté lorsque l'on en choisit une base β. Les base de la classes de β sont dits d'orientation positive

Exc 33 : $\mathbb{R}^n$ munit de la base canonique.

b) Matrices et déterminants de Gram

def 34 : Soit E un espace préhilbertien réel ou complexe. Soient $x_1, \dots, x_n \in E$. On appelle matrice de Gram de $x_1, \dots, x_n$ la matrice $(\langle x_i, x_j\rangle)_{1\leq i,j\leq n}$.

On appelle déterminant de Gram son déterminant, noté $G(x_1, \dots, x_n)$.

Prop 35 : Toute matrice de Gram est hermitienne positive. La réciproque est vraie.

· La matrice de Gram de $x_1, \dots, x_n$ est définie ssi $(x_i)_{1\leq n}$ est libre.

Thm 36 : Soit $V \subseteq E$ un sous espace munit d'une base $(e_1, \dots, e_n)$. Soit $x \in E$, alors $d(x,V)^2 = \dfrac{G(e_1, \dots, e_n, x)}{G(e_1, \dots, e_n)}$

c) Déterminant de Cayley-Menger, simplexes de $\mathbb{R}^n$.

Def 37 : Un simplexe de dimension n est l'enveloppe convexe de $n+1$ points de $\mathbb{R}^n$. Il est dégénéré si son volume est nul.

Def 38 : Soient $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$. On note $\Gamma(x_0, \dots, x_n)$ le déterminant de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & d_{01}^2 & \cdots & d_{0n}^2 \\ 1 & d_{10}^2 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & d_{n-1\,n}^2 \\ 1 & d_{n0}^2 & \cdots & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{où } d_{ij} = \|x_i - x_j\|$$

Lemme 39 : On a $\det(x_1 - x_0, \dots, x_n - x_0)^2 = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n}\Gamma(x_0, \dots, x_n)$

Prop 40 : Si $x_0, \dots, x_n$ sont dans un sous espace de dimension $\leq n-1$, $\Gamma(x_0, \dots, x_n) = 0$

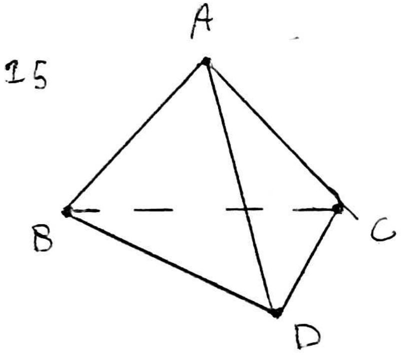
Thm 41 : $(x_0, \dots, x_n)$ sont sommets d'un simplexe non dégénéré ssi $\Gamma(x_0, \dots, x_n) \neq 0$

DEV 2

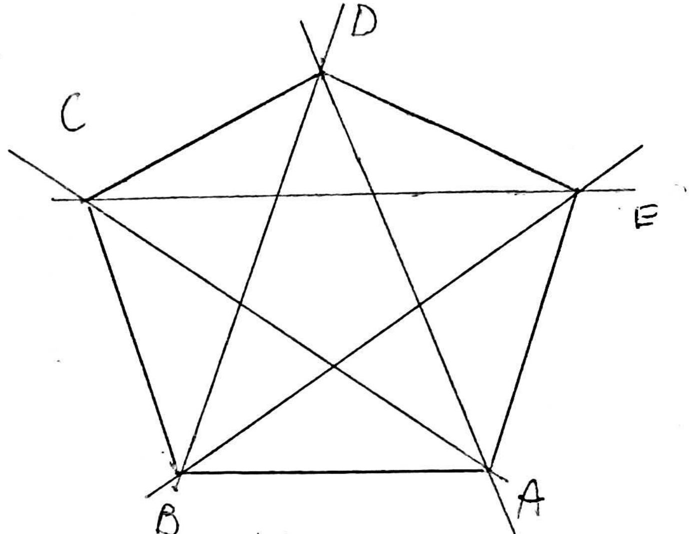
Not : On pose $\Delta(x_0, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 0 & d_{0,1}^2 & \cdots & d_{0,n}^2 \\ d_{1,0}^2 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & d_{n-1,n}^2 \\ d_{n,0}^2 & \cdots & & 0 \end{vmatrix}$

Prop 42 : Si $(x_0, \dots, x_n)$ sont sommets d'un simplexe non dégénéré, le rayon de la sphère circonscrite au simplexe est $\dfrac{\Delta(x_0, \dots, x_n)}{2\Gamma(x_0, \dots, x_n)}$

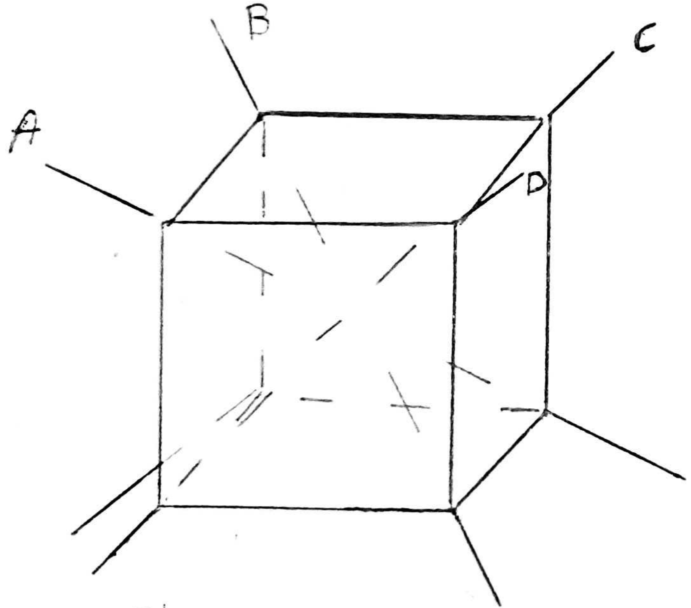
Thm 43 : Si $(x_0, \dots, x_{n+1})$ sont $n+2$ points de $\mathbb{R}^n$, ils sont coplanaires ou cosphériques ssi $\Delta(x_0, \dots, x_{n+1}) = 0$



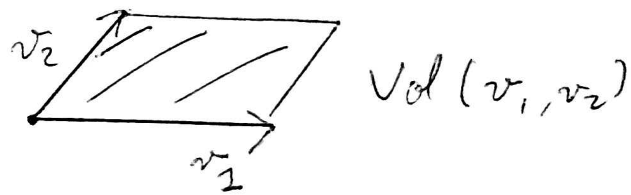
Thm 15



Thm 17



Thm 16



Thm 28