201 Espaces de fonctions. Exemples et Applications.

On note : $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; (X,d) désignera un espace métrique.

I. Espace de fonctions continues $C^0(X,\mathbb{K})$

I.1. Généralités.

[HL] **Prop** : $(C^0(X,\mathbb{K}),+,\cdot,\times)$ est une algèbre unitaire commutative où $\underline{1}$ est l'élément neutre associé à $\cdot$ défini par : $\forall f,g\in C^0(X,\mathbb{K})$ $(f.g)(x)=f(x)g(x)$; $x\in X$.

[HL] **Prop** (structure d'espace de Banach) si X est compact, on munit $C^0(X,\mathbb{K})$ d'une structure d'e.v.n : $\|f\|_\infty=\sup_{x\in K}|f(x)|$. $(C^0(X,\mathbb{K}),\|\cdot\|_\infty)$ est un Banach, et même une algèbre de Banach : $\|fg\|_\infty\leq\|f\|_\infty\|g\|_\infty$.

Dans toute la suite, on supposera que X est compact, sauf dans le théorème suivant qui s'inscrit dans un cadre plus général.

[Rom] **Thm** : (X,d), (Y,d') deux métriques avec (Y,d') complet. Toute application $f:E\to Y$ unif-continue définie sur une partie dense E de X se prolonge de façon unique en une application $g:X\to Y$, elle aussi uniformément continue.

[Rom] **Application** : * "unicité" du complété d'un espace métrique (à isométrie près).

* Construction de l'$\int$ de Riemann des fonctions réglées.

① l'intégrale d'une fonction $[0,1]\to\mathbb{R}$ est bien définie.

② l'ens. des fonctions en escalier est dense dans l'ens. des f° réglées.

③ le théorème affirme que : f(escalier) $\longmapsto\int_a^b f$ se prolonge.

I.2. Parties Denses.

[Gou] **Prop** : l'ensemble des fonctions continues nulle part dérivables sont denses dans $C([0,1],\mathbb{R})$.

[HL] **Déf** : * soit $H\subset C^0(X,\mathbb{K})$ vérifiant $\forall x\neq y\in X$, $\exists h\in H$ / $h(x)\neq h(y)$. H est dite séparante.

* soit $H\subset C^0(X,\mathbb{R})$ stable par sup et inf. Alors H est dite réticulée.

Thm : si $H\subset C^0(X,\mathbb{R})$ est réticulé et séparant et contient les fonctions constantes alors H est dense dans $C^0(X,\mathbb{R})$.

Coro (Stone-Weierstrass) toute sous-algèbre de $C^0(X,\mathbb{R})$ séparante et contenant les fonctions constantes est dense dans $C^0(X,\mathbb{R})$.

Conséquence : l'ensemble des polynômes à coefficients réels est dense dans $C^0(X,\mathbb{R})$ où X compact de $\mathbb{R}$.

Rem : une version complexe de Stone-Weierstrass existe aussi, et permet de déduire :

Coro : l'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans $C^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. — C-ex : $\mathcal{H}(U)$ non dense dans $C(U,\mathbb{C})$

I.3 Parties Compactes

But : déterminer les parties relativement compactes de $C^0(X,\mathbb{K})$. [HL]

Déf : $H\subset C^0(X,\mathbb{K})$ est dite équicontinue en $x_0\in X$ si $\forall\varepsilon>0$ $\exists\eta>0$ / $d(x,x_0)<\eta\Rightarrow\forall h\in H$ $|h(x)-h(x_0)|<\varepsilon$.

Elle est dite équicontinue sur X si elle l'est en tout point.

EX : L'ensemble des fonctions $C\geq0$-Lipschitzienne $X\to\mathbb{K}$ est équicontinu.

Thm (Ascoli) soit $H\subset C^0(X,\mathbb{K})$ [HL]

$$H \text{ relativement compacte} \Leftrightarrow \begin{cases} * \ H \text{ équicontinue} \\ * \ \forall x\in X \ H(x) \text{ précompacte dans } \mathbb{K} \end{cases}$$

Rem : une partie est précompacte dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ssi elle est bornée.

Applications (i) les opérateurs à noyau sont compacts ; si X,Y sont deux métriques compacts. $K\in C^0(X\times Y)$, μ une mesure Borélienne sur Y de masse finie

$$T:\begin{cases} C^0(Y,\mathbb{K}) \longrightarrow C^0(X,\mathbb{K}) \\ f \longmapsto x\longmapsto\int_Y K(x,y)f(y)\,d\mu(y)\end{cases}$$ [HL]

est appelé opérateur à noyau de noyau K.

(ii) $(f_n)\in C([0,1],\mathbb{R})$ vérifiant : $\exists M\geq0$, $\exists x_0\in[0,1]$ tels que [HL]

$\forall n,\forall x\in[0,1]$ $|f_n'(x)|\leq M$, $|f_n(x_0)|\leq M$

Alors on peut extraire une sous-suite de (f_n) convergeant uniformément.

[Rud]

Corollaire (théorème de Montel). Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $\mathcal{H}(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur U, δ la métrique de la c.v. uniforme sur tout compact de U. Soit $K \subset \mathcal{H}(U)$.
Si K est uniformément borné sur tout compact.
Alors : toute suite de K admet une sous-suite convergente dans $(\mathcal{H}(U), \delta)$.

Remarque : une autre conséquence est le thm. de Riesz-Fréchet-Kolmogorov donnant les précompacts de $L^{1 \leq p < \infty}(\Omega \subset \mathbb{R}^d)$ (voir §2).

[Bré]

II. Espace de fonctions intégrables.

II.1. Généralités.

Fixons $N \geq 1$ et soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. $L^1(\Omega)$ désigne l'ensemble des fonctions intégrables, quotienté par la relation d'égalité pp. On note $\|f\|_{L^1} = \int_\Omega |f| \, dx$.

Thm (cv monotone).
Soit $(f_n) \in L^1(\Omega)^{\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions mesurables telle que $\sup_n \int f_n < \infty$.
Alors : $\exists f \in L^1(\Omega)$ / $f_n \xrightarrow[n \to \infty]{pp} f$ et $f_n \xrightarrow[n \to \infty]{L^1} f$

Thm (convergence dominée)
Soit $(f_n) \in L^1(\Omega)^{\mathbb{N}}$ / (i) $f_n \xrightarrow[n \to \infty]{pp} f$ $\quad (f : \Omega \to \mathbb{R})$.
(ii) Domination : $\exists g \in L^1$ / $|f_n| \leq g$ pp.
Alors : f est $L^1(\Omega)$ et $f_n \xrightarrow[n \to \infty]{L^1} f$.

Déf : * soit $1 \leq p < \infty$: on note $L^p(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R} \; ; \; f \text{ mesurable}, |f|^p \in L^1(\Omega) \}$ quotienté par la relation d'égalité pp.
* pour $p = \infty$: $L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R} \; ; \; f \text{ mesurable}, f \text{ est bornée pp} \}$.
* on définit deux applications (qui seront des normes)
$\|f\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ et $\|f\|_{L^\infty} = \sup_{\Omega} \text{ess} |f|$

Développement.

Proposition (Fischer-Riesz)
$L^p(\Omega)$ est un Banach muni de $\|\cdot\|_p$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$

II.2. Convolution, régularisation. Résultats topologiques

Déf/Thm (convolution). Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p \leq \infty$.
$\forall x \in \mathbb{R}^N$ pp, $y \longmapsto f(x-y) g(y)$ est L^1.
On définit (pp) alors : $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y) g(y) \, dy$.
Et de plus : $f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ avec majoration : $\|f*g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \times \|g\|_{L^p}$.

Déf/prop (Support). Ω ouvert $\subset \mathbb{R}^N$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$.
Considérons $(\omega_i)_{i \in I}$ les ouverts de nullité de f :
$\forall i \in I \quad f|_{\omega_i} = 0$ pp.
Alors : $f = 0$ pp sur $\bigcup_{i \in I} \omega_i =: \omega$ et on pose $\text{Supp} f = \Omega \setminus \omega$.
(pas clair, car I n'est pas supposé dénombrable).

Prop (support et convolution). Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$
$\text{Supp}(f * g) \subset \overline{\text{Supp} f + \text{Supp}(g)}$

Prop (Régularité et convolution). $f \in C_c^k(\mathbb{R}^N)$, $k \geq 0$, $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$.
Alors : $f * g \in C^k(\mathbb{R}^N)$ et $d^\alpha(f*g) = d^\alpha f * g$.
α étant un multi-entier.

Déf (Suite Régularisante). On appelle suite régularisante toute suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ /
- $f_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$
- $\text{Supp} f_n \subset B(0, \frac{1}{n})$.
- $\int f_n = 1$.
- $f_n \geq 0$

Prop.
- si $f \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, $f_n * f \xrightarrow[n \to \infty]{} f$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^N$.
- si $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < \infty$, $f_n * f \xrightarrow[n \to \infty]{L^p} f$

En particulier : $\forall 1 \leq p < \infty$, $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$.

Remarque : il existe des suites régularisantes. Considérer :
$f(x) = \begin{cases} e^{1/|x|^2 - 1} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$ $\quad |\cdot| =$ norme sur $\mathbb{R}^N$.
Elle est $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, ≥ 0, $\text{Supp} f \subset B(0,1)$, $\int f > 0$.
Puis $f \leftarrow f / \int f$. Puis considérer $f_n(x) = n^N f(nx)$

Thm (RFK). $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert. et ω ouvert $\subset \Omega$ vérifiant : $\bar{\omega} \subset \Omega$.
Soit $F \subset L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ tel que :
- F borné.
- $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \delta < \mathrm{dist}(\omega, \complement\Omega) / \|f(\cdot+h) - f\|_{L^p} < \varepsilon$. $\forall f \in F$, $\forall h \in \mathbb{R}^N$, $|h| < \delta$.

Alors : $F|_\omega$ est rel. compacte dans $L^p(\Omega)$.

III. Espace de fonctions de carré intégrable.

III.1. Espace L^2. [CA]

Déf. (Structure Hilbertienne). $(X, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré.
$\forall f, g \in L^2(X, \mathcal{E}, \mu)$ on note $\langle f | g \rangle = \int_X f(x) \bar{g}(x) \, d\mu(x)$.
Muni de $\langle | \rangle$, $L^2(X, \mathcal{E}, \mu)$ est un Hilbert.

Prop. Soit $F \subset L^2$ un sev fermé. pour $f \in L^2$, le projeté de f sur F $p_F(f)$ est l'unique $p \in L^2$ / $p \in F$, $f - p \in F^\perp$.

L'application projection est linéaire, continue, surjective.

Application : construction de l'espérance conditionnelle.

Thm (Riesz). soit φ une forme linéaire continue sur $L^2(X, \mathcal{E}, \mu)$ $\exists ! \, g \in L^2$ / $\forall f \in L^2$, $\varphi(f) = \int_X f(x) \bar{g}(x) \, d\mu(x)$.

Applications : (i) théorème de Radon-Nikodym.
(ii) Définition de l'adjoint d'un endomorphisme continu.
(iii) théorème de Lax-Milgram.

Considérons maintenant $L^2(X, \mathcal{E}, \mu)$ comme un $\mathbb{R}$-Hilbert $a(\cdot, \cdot)$ une fbs continue, coercive.
Alors : $\forall \varphi \in (L^2())'$, $\exists x \in L^2()$ / $\forall y \in L^2()$ $\varphi(y) = a(x, y)$.

Caractérisation de x :
$$\frac{1}{2} a(x, x) - \varphi(x) = \mathrm{Min} \left\{ \frac{1}{2} a(y, y) - \varphi(y) \right\}_{y \in H}$$

III.2. Transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$. [Zui]

Déf ($\mathcal{S}()$) on note $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ / $\forall k, p \geq 0$ $\sup_{x \in \mathbb{R}} |x^k g^{(p)}(x)| < \infty$.

Prop : $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

Déf : pour $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. on appelle transformée de Fourier de u l'application $\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} u(x) \, dx = \mathcal{F}(u)(\xi)$.

Exemple : si $u(x) = e^{-a|x|^2}$, $a > 0$. $\hat{u}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\xi^2/4a}$.

Prop (Inversion) : $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est une application bijective bicontinue d'inverse : $\mathcal{F}^{-1}(v)(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} v(x) dx$.

Rem : la densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans L^2 permet de prolonger la transformée à L^2 et le théorème (de Plancherel) suivant affirme que :

Thm : $\begin{cases} L^2 \longrightarrow L^2 \\ u \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{u} \end{cases}$ est une isométrie linéaire bijective.

Théorème (Critère pour qu'une famille de poly. orthogonaux soit une base) — Développement [OA]

* I intervalle $\subset \mathbb{R}$. on appelle fonction poids une fonction $\rho : I \to \mathbb{R}$ mesurable, > 0 /
$\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_I |x|^n \rho(x) \, dx < \infty$.
$L^2(I, \rho)$ désigne $L^2(I, \rho \cdot dx)$, muni de $\langle f | g \rangle = \int_I f \bar{g} \rho \, dx$.
* La famille de polynômes orthogonaux associée à ρ est une base Hilbertienne de $L^2(I, \rho)$ sous réserve que :
$\exists \alpha > 0$ / $\int_I e^{\alpha |x|} \rho(x) \, dx < \infty$

Application. Le théorème permet de construire une base Hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$, à partir d'une base de $L^2(I, \rho)$ où $\rho(x) = e^{-x^2}$. [OA]

$\begin{cases} L^2(\mathbb{R}, \rho) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}) \\ f \longmapsto f\sqrt{\rho} \\ \frac{g}{\sqrt{\rho}} \longleftarrow g \end{cases}$ forme une bijection.

en notant $(P_n)_n$ les polynômes de Hermite, $(P_n(x) e^{-x^2/2})_n$ est alors une base Hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

Vecteurs propres de l'opérateur $\mathcal{F}$. on note (P_n) la famille des polynômes d'Hermite. (associés au poids e^{-x^2}) [Kol]
on définit des fonctions (dites d'Hermite)
$$u_n(t) = (n! 2^n \sqrt{\pi})^{-1/2} \cdot H_n(t) e^{-t^2/2}.$$
Elles forment des vecteurs propres de $\mathcal{F}$, à valeurs propres associées : $\sqrt{2\pi}(-i)^n$.

III.3. Possibilité de parler de $H^1(\cdot)$ (Déf / Caractérisation (DVT) / Structure Hilbertienne (DVT), application aux EDP). [Bré]

Références :

* [HL] Hirsch-Lacombe. "Eléments d'Analyse fonctionnelle".
* [Pom]. Pommelet "Analyse".
* [Gou] Gourdon "Analyse".
* [Bré] Brezis, "Analyse Fonctionnelle".
* [Rud] Rudin "Analyse Réelle et complexe".
* [OA] Objectif Agrégation.
* [Kol] A. Kolmogorov "Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle".
* [Zui]. Zuily " Eléments de distributions .... ".

développement amusant : fonctions lipschitziennes