201 Espaces de fonctions. Ex et app

I) Espace des fonctions continues.

1) Définition X métrique, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

[Di] $\mathcal{B}(X;K)$ l'ensemble des fonctions bornées de X dans K

$\mathcal{C}(X;K)$ ——— continues ——— K

$\mathcal{C}_b(X;K)$ ——— continues bornées ——— K.

Prop 1 $(\mathcal{B}(X;K)\ \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach et $\mathcal{C}_b(X;K)$ est fermé dans $\mathcal{B}(X;K)$.

Rem 1 Si X est compact : $\mathcal{C}_b(X;K) = \mathcal{C}(X;K)$. De plus $(\mathcal{C}(X;K);\|\cdot\|_\infty)$ est séparable.

2) Parties compacts X métrique compact

[HL] **Th 1** (Ascoli) Une partie de $\mathcal{C}(X;K)$ est relativement compact ssi elle est bornée et équicontinue.

[Br] **App 1** - E espace de Banach $T \in \mathcal{L}(E)$. Alors : T compact $\iff$ T^* compact.

App 2 Soit F sev fermé de $\mathcal{C}([0;1];\mathbb{R})$ et tel que $F \subset \mathcal{C}^1([0;1];\mathbb{R})$ alors $\dim F < +\infty$.

App 3 Soit $k \in \mathcal{C}[0;1]^2$. Alors

$$T : \begin{array}{l} \mathcal{C}[0;1] \longrightarrow \mathcal{C}[0;1] \\ f \longrightarrow x \to \int_0^1 k(x;y) f(y)\,dy \end{array}$$ est compact.

[ZQ] **Th 2** (Montel) Soit Ω ouvert de $\mathbb{C}$. On note $\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω. Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$. Si $\mathcal{F}$ est uniformément bornée sur tout compact inclus dans Ω. Alors $\mathcal{F}$ est relativement compact dans $\mathcal{H}(\Omega)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. DVP

Cor 1 Soit Ω ouvert convexe borné de $\mathbb{C}$. $a \in \Omega$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ telle que $f(a) = a$ et $|f'(a)| < 1$, $f(\Omega) \subset \Omega$ alors on peut extraire de $(f^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ (composition) une sous suite convergeant uniformément vers a sur tout compact de Ω.

3) Partie dense X métrique compact

Def 1 $H \subset \mathcal{C}(X;K)$ est séparant si $\forall x;y \in X \times X$ $x \neq y$ $\exists f \in H$ tq $f(x) \neq f(y)$. [HL]

Th 3 (Stone - Weierstrass)

- $K = \mathbb{R}$: Toute sous algèbre de $\mathcal{C}(X;\mathbb{R})$ séparante et contenant les constantes est dense dans $\mathcal{C}(X;\mathbb{R})$
- $K = \mathbb{C}$ Toute sous-algèbre de $\mathcal{C}(X;\mathbb{C})$ séparante et auto-conjugué, contenant les constantes est dense dans $\mathcal{C}(X;\mathbb{C})$.

App 4 Les fonctions polynomiales sont dense dans $\mathcal{C}([0;1];\mathbb{R})$. Les polynomes trigonométriques sont dense dans $\mathcal{C}(\underset{0\sim 1}{[0;1]};\mathbb{R})$

Contre-ex 1 $H = \{z \to P(z)\ P \in \mathbb{C}[X]\} \subset \mathcal{C}(U;\mathbb{C})$ n'est pas dense. $z \to \bar{z} \notin \bar{H}$. $(U = \{z \,/\, |z| = 1\})$

Prop 2 L'espace des fonctions continues nulle part derivable est dense dans $\mathcal{C}([0;1];\mathbb{R})$.

[Br]

II - Espaces des fonctions intégrables

1) Définitions Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$

déf 2 Pour $1 \leq p < +\infty$ on pose

$L^p = \{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable} / \int |f|^p < +\infty \} / f=g \text{ p.p}$

et $\|f\|_p = \left(\int |f|^p\right)^{1/p}$

Pour $p=+\infty$ $L^\infty = \{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable} / \exists C \geq 0 \text{ tq } |f| \leq C \text{ p.p} \} / f=g \text{ p.p}$

et $\|g\|_\infty = \inf\{ C \geq 0 / |g| \leq C \text{ p.p}\}$

prop 3 * $f \in L^p$ $g \in L^q$ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ alors $\int |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_q$

* $f, g \in L^p$ alors $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

Th 4 (Riesz-Fischer) $(L^p, \|\ \|_p)$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq +\infty$.

[Br]

2) Convolution et régularisation

Th 5 $C_c(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$

App 5 L'application $\tau : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}))$, $h \longmapsto \tau_h$, $f \mapsto \tau_h f$ est continue.

Th 6 : Soient $f \in L^1$ $g \in L^p$ $(1 \leq p \leq +\infty)$ alors pour presque tout x $f*g(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(y) g(x-y)\,dy$ est définie et $\|f*g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$ donc $f*g \in L^p$.

Déf 3 $(\rho_n)_{n \geq 1}$ est une suite régularisante si $\forall n$:

* $\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ * $\operatorname{Supp} \rho_n \subset B(0, 1/n)$ * $\rho_n \geq 0$
* $\int \rho_n = 1$

Ex 1 On pose $\rho(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & \text{si } |x|<1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$ $C = \left(\int \rho\right)^{-1}$

alors $\rho_n(x) = C n^N \rho(nx)$ pour $x \in \mathbb{R}^N$ est une suite régularisante

Th 7 Si $f \in C(\mathbb{R}^N)$ alors $\rho_n * f \to f$ uniformément sur tout compact.

Si $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ alors $\rho_n * f \to f$ dans L^p.

Cor 2 $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans L^p $1 \leq p < +\infty$.

Th 8 (Riesz-Fréchet-Kolmogorov) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $\omega \subset\subset \Omega$. Soit $\mathcal{F} \subset L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p < \infty$. Si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\delta < \operatorname{dist}(\omega; \Omega^c)$ tq $\|\tau_h f - f\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon$ $\forall h \in \mathbb{R}^N$ $|h| < \delta$ et $f \in \mathcal{F}$ alors $\mathcal{F}_{|\omega}$ est relativement compact dans $L^p(\omega)$.

Rem 2 Version L^p du théorème d'Ascoli.

III Espaces de Hilbert [Br] [OA]

1) Définition

Déf 4 Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire ou hermitien, tel qu'il soit complet pour la norme associée.

Ex 2 $L^2(\Omega)$ muni de $\langle f, g \rangle = \int_\Omega f g$ est un Hilbert.

Th 9 Tout espace de Hilbert séparable admet une base Hilbertienne.

Ex 3 $(t \mapsto e^{int})_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2([0, 2\pi])$

2) Théorème de Lax-Milgram

Th 10 (Riesz) $\forall \varphi \in H'$ $\exists!\, u \in H$ tel que $\forall g \in H$ $\langle \varphi, g \rangle = \langle f, g \rangle$

App 6 (Lax-Milgram) : Soit a une forme bilinéaire, continue et coercive sur H^2. Alors $\forall \varphi \in H'$ il existe un unique $u \in H$ tq : $a(u;v) = \langle \varphi ; v\rangle \ \forall v \in H$.
De plus si a est symétrique, alors u est caractérisé par : $u \in H$ et $\frac{1}{2} a(u;u) - \langle \varphi, u\rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2} a(v;v) - \langle \varphi ; v \rangle \right\}$

[ZQ] 3) Transformation de Fourier.

[Ru] **Def 5** On pose $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow C_0(\mathbb{R})$, $f \longmapsto \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx$

Def 6 On pose $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tq $\forall p, q \in \mathbb{N}^2$ $x \mapsto x^p f^{(q)}(x)$ soit bornée sur $\mathbb{R}$.

Ex 4 $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$ $g(x) = e^{-ax^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}(g)(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$

Prop 4 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1 \cap L^2$ qui est dense dans L^2

DVP **Th 11** * L'application linéaire $\mathcal{F}$ se prolonge en une application linéaire bijective continue de L^2 sur L^2. De plus $\sqrt{2\pi}^{-1} \mathcal{F}$ est alors une isométrie de L^2.
* $\mathcal{F}$ envoit $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. $\mathcal{F}_{|\mathcal{S}(\mathbb{R})}$ est bijection continue d'inverse $\overline{\mathcal{F}} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $f \longmapsto \xi \mapsto (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{ix\xi} dx$

[BA] **App 7** (Polynômes orthogonaux) Soit ρ une fonction poids sur $\mathbb{R}$. Si il existe $\alpha > 0$ tel que $\int_{\mathbb{R}} e^{\alpha|x|} \rho(x) dx < +\infty$ alors la famille de polynômes orthogonaux associés à $\langle \cdot, \cdot \rangle_\rho$ est une base hilbertienne de $L^2(\rho)$.

[W] **App 8** (Shannon) $BL^2 = \{ u \in L^2(\mathbb{R}) / \operatorname{supp} \mathcal{F}(u)(2\pi \cdot) \subset I \}$ où $I = [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$. Alors BL^2 est un espace de Hilbert admettant $(\operatorname{sinc}(\cdot - k))_{k \in \mathbb{Z}}$ pour base hilbertienne.

IV Espaces de Sobolev

$I =]a;b[$ intervalle borné [Br]

Def 7 $H^1(I) = \{ f \in L^2(I) / f' \in L^2(I) \}$ (dérivé au sens des distributions)
et $(u;v)_{H^1} = (u;v)_{L^2} + (u';v')_{L^2}$ et $\|u\|_{H^1} = (u;u)_{H^1}^{\frac{1}{2}}$

Prop 5 $H^1(I)$ est un espace de Hilbert, de plus si $|I| < +\infty$ alors $H^1(I)$ s'injecte de façon compacte dans $\mathcal{C}(\bar{I})$.

Def 8 On pose $H^1_0(I) = \overline{C^\infty_c(I)}$ dans $H^1(I)$.

Th 12 $u \in H^1_0(I)$ si et seulement si $u_{|\partial I} = 0$.

Prop 6 (Inégalité de Poincaré) Il existe C dépendant de $|I|$ telle que $\|u\|_{H^1} \leq C \|u'\|_{L^2}$ $\forall u \in H^1_0(I)$.

* Soit le problème : (1) $\begin{cases} -u'' + u = f & \text{sur } I =]0;1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$
où $f \in L^2(I)$.

* Formulation faible (1*) $\begin{cases} -u'' + u = f & \text{dans } \mathcal{D}'(I) \\ \text{et } u \in H^1_0 \end{cases}$

* Formulation variationnelle (1') $\begin{cases} \int_I u'v' + \int_I uv = \int_I fv & \forall v \in H^1_0(I) \\ u \in H^1_0(I). \end{cases}$

Prop 7 Il existe une unique solution de (1') ($\Leftrightarrow$ (1*)) $u \in H^1_0$ qui s'obtient par : $\min_{v \in H^1_0} \left\{ \frac{1}{2} \int_I v^2 + v'^2 - \int_I fv \right\}$
De plus si $f \in \mathcal{C}(\bar{I})$ alors $u \in \mathcal{C}^2(\bar{I})$ et vérifie (1).

Bibliographie

Rudin Analyse réelle et complexe [Ru]

Zuily Queffélec [ZQ]

Hirsch Lacombe [HL]

Objectif Agreg [OA]

Brezis [Br]

Dieudonné V1 [Di]

Willem Analyse fonctionnelle [W]