201 — Espaces de fonctions : exemples et applications.

I) Fonctions continues

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, (X,d) un espace métrique compact non vide.

1) Définition

[HL] p 24

On note $C(X,\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de X dans $\mathbb{K}$.

$C(X,\mathbb{K})$ est une algèbre unitaire commutative.

On munit $C(X,\mathbb{K})$ de la norme uniforme sur X, notée $\|.\|$ et définie par $\|f\| = \max_{x\in X} |f(x)|$.

2) Complétude

[HL] p 24

Thm 1 : L'espace $C(X,\mathbb{K})$ est un espace de Banach.

Application 2 : Le théorème de Baire est vérifié dans $C(X,\mathbb{K})$.

3) Parties compactes

[HL] p 37-39

Def 3 : Une partie H de $C(X,\mathbb{K})$ est dite équicontinue en un point x_0 de X si elle satisfait la condition suivante :

$\forall \varepsilon>0\ \exists \eta>0\ \forall x\in X\ \ d(x,x_0)<\eta \Rightarrow \forall h\in H\ |h(x)-h(x_0)|<\varepsilon$.

H est dite équicontinue si elle est équicontinue en tout point de X.

Thm 4 (Ascoli) : Une partie $C(X,\mathbb{K})$ est relativement compacte dans $C(X,\mathbb{K})$ ssi elle est bornée et équicontinue.

Application 5 : Soient X et Y deux espaces métriques compacts, K un élément de $C(X\times Y,\mathbb{K})$ et μ une mesure borélienne sur Y de masse finie. On définit un opérateur linéaire T de $C(Y,\mathbb{K})$ dans $C(X,\mathbb{K})$ en posant : $\forall f\in C(Y,\mathbb{K})\ \forall x\in X\ \ Tf(x) = \int_Y K(x,y)f(y)d\mu(y)$.
Alors l'image par T de la boule unitée fermée de $C(Y,\mathbb{K})$ est une partie relativement compacte de $C(X,\mathbb{K})$.

[ZQ] p 359

Application 6 : Théorème d'Arzela Péano : Soient I intervalle de $\mathbb{R}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$. Soient $(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$, a,b deux réels positifs et $Q=\{(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m \mid |t-t_0|\leq a,\ |x-x_0|\leq b\}$. Soient $f : I\times\Omega\to\mathbb{R}^m$ fonction continue sur Q et $M>0$ tels que $\sup_Q |f(t,x)|\leq M$.
Le problème $\frac{dx}{dt}(t) = f(t,x(t))$ où x est une fonction C^1 de t à valeurs Ω admet une solution (x,J), où $J=[t_0-T,t_0+T]$, $T=\min(a,\frac{b}{M})$ telle que $x(t_0)=x_0$

4) Parties denses

[GOU] p 404

Thm 7 : On note $\mathcal{C} := C([0,1],\mathbb{R})$. Le sous-ensemble de $\mathcal{C}$ des fonctions continues nulle part dérivables est dense dans $\mathcal{C}$. $\boxed{\text{DVP}}$

[GOU] p 84

Ex 8 : $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto \sum_{p\geq 0}\frac{1}{2^p}\Delta(8^p x)$ avec Δ fonction définie sur $\mathbb{R}$, 1-périodique, dont la restriction à $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ vérifie $\Delta(x)=|x|$.

[GOU] p 224

Thm 9 (Weierstrass) : Toute fonction continue $f : [a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de fonctions polynômes.

[GOU] p 286

Application 10 : Soit $f : [0,1]\to\mathbb{C}$ une fonction continue telle que $\forall n\in\mathbb{N},\ \int_0^1 f(t)t^n dt = 0$. Montrer que f est la fonction nulle.

5) Sous espaces de $C(X,\mathbb{K})$.

[ZQ] p 258

Def 11 : Soit k un entier. On note $C^k(X,\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des fonctions k fois différentiables dans X à valeurs dans $\mathbb{K}$ dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre k sont continues dans X.
On le munit de la norme $\|f\| = \sum_{\alpha\leq k}\|f^{(\alpha)}\|_\infty$.

Rq 12 : $C^k(X,\mathbb{K})$ est inclus dans $C(X,\mathbb{K})$.

Thm 13 : $C^k(X,\mathbb{K})$ est complet.

Def 14 : On pose $C^\infty(X,\mathbb{K}) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C^k(X,\mathbb{K})$.

Thm 15 : $C^\infty(X,\mathbb{K})$ est complet.

II) Espaces L^p

[ZQ] p 263

$(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1) Définition et premières propriétés.

Def 16 : • Pour tout réel $1\leq p<+\infty$ on définit :
$L^p(\mu) = \{f : (X,\mathcal{A})\to(\mathbb{K},\mathcal{B}(\mathbb{K}))\ \text{mesurables} / \int_X |f|^p d\mu < +\infty\}/\{\|.\|_p = 0\}$
où $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}$.

• Soit $f : (X,\mathcal{A})\to\overline{\mathbb{R}}_+$. On définit le supremum essentiel de f par $\sup\text{ess} := \inf\{M>0 / \mu(\{f>M\})=0\}$. Pour $f : (X,\mathcal{A})\to\mathbb{K}$ on pose $\|f\|_\infty = \sup\text{ess}(|f|)$. On définit $L^\infty(\mu) = \{f : (X,\mathcal{A})\to\mathbb{K} / \|f\|_\infty < +\infty\}/_{\{\|.\|_\infty = 0\}}$

Prop 17 (Inégalité de Hölder) : Soient $f \in L^p(\mu)$, $g \in L^q(\mu)$ avec $p,q \in [1,+\infty]$ et $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Alors $fg \in L^1(\mu)$ et $\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$.

Prop 18 (Inégalité de Minkowski) : Soient $p \in [1,+\infty]$ et $f, g \in L^p(\mu)$. Alors $\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$.

2) Complétude.

Thm 19 (Riesz - Fischer) : $L^p(\mu)$ est un Banach pour tout $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. $\boxed{DVP}$

[BRE] p 57-58

Cor 20 : Soient $(f_m)_m$ une suite de $L^p(\mu)$ et $f \in L^p(\mu)$ telles que $\|f_m - f\|_{L^p} \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$. Alors il existe une sous-suite extraite (f_{m_k}) telle que :

a) $f_{m_k}(x) \longrightarrow f(x)$ p.p sur Ω

b) $|f_{m_k}(x)| \leqslant h(x)$ $\forall k$ et p.p sur Ω avec $h \in L^p(\mu)$.

[BP] p 161

Application 21 : $L^2_{\mathbb{K}}(\mu)$ muni du produit scalaire $(f,g) := \int_X f\bar{g}\, d\mu$ est un espace de Hilbert sur $\mathbb{K}$.
$L^2_{\mathbb{K}}(\mu)$ vérifie donc le théorème de projection sur un convexe fermé et le théorème de représentation de Riesz.

3) Critère de compacité

Def 22 : Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert. On dit qu'un ouvert ω est fortement inclus dans Ω et on note $\omega \subset\subset \Omega$ si $\bar{\omega} \subset \Omega$ et $\bar{\omega}$ est compact.
- On note $\tau_h f$ la translation de f par h ie $(\tau_h f)(x) = f(x+h)$.

[BRE] p 72

Thm 23 (Riesz - Fréchet - Kolmogorov) : Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et soit $\omega \subset\subset \Omega$. Soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble borné de $L^p(\Omega)$ avec $1 \leqslant p < +\infty$. On suppose que $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, $\delta < dist(\omega, \Omega^c)$ tel que $\|\tau_h f - f\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon$ $\forall h \in \mathbb{R}^N$ avec $|h| < \delta$ et $\forall f \in \mathcal{F}$.
Alors $\mathcal{F}_{|\omega}$ est relativement compact dans $L^p(\omega)$.

4) Sous-espaces denses.

[BRE] p 61

Thm 24 : L'espace $C_c(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leqslant p < \infty$.

Def 25 : On définit le produit de convolution de deux fonctions f et g quelconques par $(f*g)(x) = \int f(t) g(x-t)\, dt$ (quand l'intégrale est bien définie).

[BRE] p 66

Thm 26 : Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ avec $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. Alors $f*g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $\|f*g\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}$.

[BP] p 279

Thm 27 : Soient $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^q(\mathbb{R})$ avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $p,q \in [1,+\infty]$. Alors $f*g$ est uniformément continue et bornée sur $\mathbb{R}$ et on a $\|f*g\|_\infty \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$.
De plus si $1 < p,q < +\infty$ alors $\lim_{\|x\|\to\infty} f*g(x) = 0$.

[BRE] p 69

Prop 28 : Si $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$ alors $f*g \in C^\infty(\mathbb{R})$.

[BRE] p 70-71

Def 29 : On appelle suite régularisante toute suite $(\rho_n)_{n\geqslant 1}$ de fonctions telle que : $\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, $supp\, \rho_n \subset B(0,\frac{1}{n})$, $\int \rho_n = 1$ et $\rho_n \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}^N$.

Thm 30 : Si $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ avec $1 \leqslant p < +\infty$ alors $\rho_n * f \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Cor 31 : $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leqslant p < \infty$ pour tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$.

[BP] p 167 [ZQ] p 73

Thm 32 : On se place sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ avec λ mesure de Lebesgue. Alors l'ensemble des fonctions en escalier à support compact est dense dans tous les espaces $L^p_{\mathbb{R}}(\lambda)$, $1 \leqslant p < +\infty$.

Application 33 (Lemme de Riemann - Lebesgue) : Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et soit $f \in L^1([a,b])$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Alors $\lim_{|\lambda|\to\infty} \int_a^b f(t) e^{i\lambda t}\, dt = 0$.

[OA] p 110

Def 34 : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle fonction poids une fonction $\rho : I \to \mathbb{R}$ mesurable strictement positive telle que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\int_I |x|^n \rho(x)\, dx < +\infty$. On note $L^2(I,\rho) = L^2(I, \rho(x)\, dx)$.

[OA] p110

Thm 35 : Muni du produit scalaire $\langle f,g\rangle_\rho = \int_I f(x)\,\overline{g}(x)\,\rho(x)\,dx$, $L^2(I,\rho)$ est un espace de Hilbert.

Par définition de ρ, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X^n : x \longrightarrow x^n$ est dans $L^2(I,\rho)$. Par le procédé de Gram-Schmidt, on orthonormalise $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ en une famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes orthonormés de degré $\deg(P_n) = n$. La famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée famille des polynômes orthogonaux associée à ρ.

Thm 36 : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction poids. On suppose qu'il existe un réel $a>0$ tel que $\int_I e^{a|x|}\rho(x)\,dx < +\infty$.
Alors les polynômes orthogonaux associés à ρ forment une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.

5) Relation d'inclusion entre les L^p

Prop 37 :
- si $\mu(X) < +\infty$ alors $0<p\leq q \Rightarrow L^q(\mu) \subset L^p(\mu)$.
- si m est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ alors $0<p\leq q \Rightarrow \ell^p(\mathbb{N}) \subset \ell^q(\mathbb{N})$

[BP] p154

C-ex 38 : Sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$, $\frac{\mathbb{1}_{]0,1]}}{\sqrt{\cdot}} \in L^1(\lambda)\setminus L^2(\lambda)$
et $\frac{1}{\sqrt{(\cdot)^2+1}} \in L^2(\lambda)\setminus L^1(\lambda)$.

Rq 39 : En mesure finie, $\|f\|_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} \|f\|_\infty$

III) Fonctions holomorphes

Ω ouvert de $\mathbb{C}$.

1) Définition

[RUD] p242

Déf 40 : Soit f une fonction complexe définie sur Ω. Si $z_0 \in \Omega$ et si $\lim\limits_{\substack{z\to z_0 \\ z\neq z_0}} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existe, on la note $f'(z_0)$ et on l'appelle dérivée de f en z_0. Si $f'(z_0)$ existe pour tout $z_0 \in \Omega$, on dit que f est holomorphe (ou analytique) sur Ω. La classe de toutes les fonctions holomorphes sur Ω est notée $H(\Omega)$.
$H(\Omega)$ est un anneau.

Prop 41 : Si $f \in H(\Omega)$, si $f(\Omega) \subset \Omega_1$, si $g \in H(\Omega_1)$ et si $h = g\circ f$, alors $h \in H(\Omega)$ et $h'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0)$ $\forall z_0 \in \Omega$.

Prop 42 : Si $f \in H(\Omega)$ et si f ne s'annule pas sur Ω alors $\frac{1}{f}$ est holomorphe sur Ω.

2) $H(\Omega)$ est un fermé

[RUD] p256

Déf 43 : Une suite de fonctions (f_j) définies sur Ω converge vers f uniformément sur les sous-ensembles compacts de Ω si à chaque compact $K \subset \Omega$ et à chaque $\varepsilon > 0$ correspond un entier $N = N(K,\varepsilon)$ tel que $|f_j(z) - f(z)| < \varepsilon$ pour tout $z \in K$ si $j > N$.

Thm 43 : Soient $f_j \in H(\Omega)$ pour $j = 1,2,3,\ldots$ et supposons que $f_j \longrightarrow f$ uniformément sur les sous-ensembles compacts de Ω. Alors $f \in H(\Omega)$ et $f_j' \longrightarrow f'$ uniformément sur les sous-ensembles compacts de Ω.
En particulier, $H(\Omega)$ est un sous-ensemble fermé de $C(\Omega)$ muni de la topologie compacte.

3) Parties compactes.

[RUD] p329

Déf 44 : Soit Ω un ouvert connexe et $\mathcal{F} \subset H(\Omega)$. On dit que $\mathcal{F}$ est une famille normale si toute suite d'éléments de $\mathcal{F}$ contient une sous-suite qui converge uniformément sur les sous-ensembles compacts de Ω.
On n'exige pas que la fonction limite appartienne à $\mathcal{F}$.

Thm 45 (Montel) : Supposons $\mathcal{F} \subset H(\Omega)$ et $\mathcal{F}$ uniformément bornée sur tout compact inclus dans l'ouvert connexe Ω.
Alors la famille $\mathcal{F}$ est normale.

[ZQ] p153

Application 46 : Soit Ω un ouvert connexe borné de $\mathbb{C}$. Soit $a \in \Omega$. Soit $f \in H(\Omega)$ telle que $f(a) = a$ et $|f'(a)| < 1$.
Alors on peut extraire de $(f^n)_n$ une sous-suite convergeant uniformément vers a sur tout compact inclus dans Ω.
(où $f^n = \underbrace{f\circ\cdots\circ f}_{n \text{ fois}}$)

[GOU] : Gourdon, Analyse 2ème ed.
[RUD] : Rudin, Analyse réelle et complexe, 3ème ed.
[BP] : Briane et Pagès, Théorie de l'intégration
[HL] : Hirsch, Lacombe, Eléments d'analyse fonctionnelle
[BRE] : Brezis, Analyse fonctionnelle
[ZQ] : Zuily, Queffélec, Analyse pour l'agrégation
[OA] : Objectif agrégation.

Théorème de Riesz-Fischer

Isaline AUBERT et Ninon FETIQUE

Référence : Brezis, *Analyse fonctionnelle*, p57.

Théorème 1.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, $p \in [1, +\infty]$.
$L^p(\Omega)$ est un espace de Banach.

Démonstration. – Cas $p = +\infty$:
Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans L^∞.

$$\forall k \geq 1, \exists N_k \geq 0, \forall n \geq N_k, \forall q \geq 0, \|f_{n+q} - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{k}.$$

Par définition de la norme infinie, on a alors :

$$\forall k \geq 1, \exists N_k \geq 0, \forall n \geq N_k, \forall q \geq 0, \exists E_{k,n,q} \text{ négligeable }, \forall x \in \Omega \backslash E_{k,n,q}, |f_{n+q}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k} \quad (\bigstar)$$

Soit maintenant $E = \underset{k,n,q}{\cup} E_{k,n,q}$. E est également de mesure nulle en tant qu'union dénombrable d'ensembles négligeables. Et pour tout x dans $\Omega \backslash E$, la suite $(f_n(x))_n$ est alors de Cauchy dans $\mathbb{R}$, qui est complet. Elle est donc convergente vers un réel $f(x)$.
En faisant tendre q vers l'infini dans $(\bigstar)$ on obtient :

$$\forall k \geq 1, \exists N_k \geq 0, \forall n \geq N_k, \forall x \in \Omega \backslash E, |\, f(x) - f_n(x) \,| \leq \frac{1}{k}.$$

On en déduit donc que $f \in L^\infty$ et que $f_n \underset{n \to \infty}{\xrightarrow{\|\cdot\|_\infty}} f$.

– Cas $p < \infty$:
Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans L^p.
Comme toute suite de Cauchy admettant une valeur d'adhérence est convergente, nous allons montrer que $(f_n)_n$ possède une sous-suite qui converge.
Comme $(f_n)_n$ est de Cauchy, il existe une extractrice φ telle que :

$$\forall n \geq 1, \left\| f_{\varphi(n+1)}(x) - f_{\varphi(n)}(x) \right\| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Posons alors, pour $n \geq 1$, $g_n : x \longmapsto \sum_{k=1}^n \left\| f_{\varphi(k+1)}(x) - f_{\varphi(k)}(x) \right\|$.
Pour tout $n \geq 1$, $g_n \in L^p$ car g_n est somme de fonctions dans L^p. Et

$$\|g_n\|_p \leq \sum_{k=1}^n \left\| f_{\varphi(k+1)} - f_{\varphi(k)} \right\|_p \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \leq \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2^k} = 1.$$

Ainsi $(g_n)_n$ est une suite de L^p croissante et majorée dans L^p. Par le théorème de convergence monotone on en déduit qu'il existe $g \in L^p$ telle que $g_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g(x)$ pp.
Alors pour presque tout x dans Ω, pour tout $n, q \geq 0$,

$$\begin{aligned}
|f_{\varphi(n+q)}(x) - f_{\varphi(n)}(x)| &= |\sum_{k=1}^{q} f_{\varphi(n+k)}(x) - f_{\varphi(n+k-1)}(x)| \\
&\leq \sum_{k=1}^{q} |f_{\varphi(n+k)}(x) - f_{\varphi(n+k-1)}(x)| \\
&= g_{n+q}(x) - g_{n-1}(x) \\
&\leq g(x) - g_{n-1}(x) \\
&\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

La majoration étant indépendante de q, on en déduit que pour presque tout x dans Ω, la suite $(f_{\varphi(n)})_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, donc convergente vers un réel $f(x)$.
En faisant tendre q vers l'infini dans l'inégalité précédente, on trouve que pour presque tout x, pour tout $n \geq 0$

$$|f(x) - f_{\varphi(n)}(x)| \leq g(x) - g_{n-1}(x) \leq g(x).$$

Donc $f \in L^p$, car g et $f_{\varphi(n)}$ sont dans L^p.
Il reste à montrer que la convergence de $f_{\varphi(n)}$ vers f a bien lieu dans L^p.

□

Corollaire 1.

Soient $(f_n)_n$ une suite de L^p et $f \in L^p$ telles que $f_n \underset{n\to\infty}{\overset{\|\cdot\|_p}{\longrightarrow}} f$.
Alors il existe une suite extraite $(f_{\varphi(n)})_n$ telle que :
- $hf_{\varphi(n)}(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ pp
- $|f_{\varphi(n)}(x)| \leq h(x)$ pour tout n et pp, avec $h \in L^p$.

Démonstration. – Cas $p = +\infty$:
La suite $(f_n)_n$ converge donc est de Cauchy. On a montré qu'il existe $f^* \in L^\infty$ telle que $f_n(x) \longrightarrow f^*(x)$ pp et $f_n \overset{\|\cdot\|_\infty}{\longrightarrow} f^*$. On a donc $f^* = f$, d'où le premier point.
Pour la majoration, la fonction $h = |f| + 1 \in L^\infty$ convient.
Dans L^∞ le résultat est donc plus fort puisqu'on a le résultat pour la suite entière.
– Cas $p < \infty$:
De même $(f_n)_n$ est de Cauchy donc convergente. On a montré qu'il existe une extractrice φ et $f^* \in L^p$ telles que $f_{\varphi(n)} \longrightarrow f^*(x)$ pp et $f_{\varphi(n)} \overset{\|\cdot\|_p}{\longrightarrow} f^*$. Donc $f = f^*$ et on a le premier point.
De plus, $|f_{\varphi(n)}(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ avec $|f| + |g| \in L^p$.

□

Densité des fonctions continues nulle part dérivables

Isaline AUBERT et Ninon FETIQUE

Référence : Zuily-Queffelec, *Analyse pour l'agrégation*, p270.

Théorème 1.

L'ensemble A des fonctions continues sur $[0,1]$ qui ne sont dérivables en aucun point de $[0,1]$ est dense dans $\mathcal{C} = (\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$.

Démonstration. Pour montrer le résultat, il suffit de montrer que A contient une intersection dénombrable d'ouverts dense. En effet, $\mathcal{C}$ étant complet (en tant que fermé de l'espace des fonctions bornées de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, qui lui est complet, par exemple), alors le lemme de Baire nous assurera que A est dense dans $\mathcal{C}$.
Pour cela nous allons raisonner sur l'ensemble $B = A^c$ des fonctions de $\mathcal{C}$ qui sont dérivables en au moins un point de $[0,1]$, et montrer que B est inclus dans une union dénombrable de fermés d'intérieur vide.

Posons $F_n = \{f \in \mathcal{C} / \exists x \in [0,1], \forall y \in [0,1], |f(y) - f(x)| \leq n|x-y|\}$.

- $B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$:

Soit $f \in B$. Alors il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que f est dérivable en x_0.
L'intervalle $[0,1]$ étant compact, et la fonction f_0 définie par $f_0(y) = \frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}$ si $y \neq x_0$ et $f_0(x_0) = f'(x_0)$ étant continue, on en déduit qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout y dans $[0,1]$, $\left|\frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}\right| \leq n$.
Ainsi $f \in F_n$.

- F_n est fermé :

Soit $(f_k)_k$ une suite de F_n qui converge vers une fonction f dans $\mathcal{C}$. On cherche à montrer que f appartient àF_n.
Par définition de F_n on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists x_k \in [0,1], \forall y \in [0,1], |f_k(x_k) - f_k(y)| \leq n|x_k - y|. \quad (\star)$$

La suite $(x_k)_k$ étant à valeurs dans le compact $[0,1]$, on peut en extraire une sous-suite, que l'on notera encore $(x_k)_k$, convergeant vers $x_0 \in [0,1]$.

Nous allons monter que pour tout $y \in [0,1]$ on a $f_k(y) - f_k(x_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(y) - f(x_0)$. On aura alors montrer que f appartient à F_n (en passant à la limite dans $(\star)$), et donc que cet ensemble est fermé.
Comme $(f_k)_k$ converge vers f dans $\mathcal{C}$, on a alors $f_k(y) \longrightarrow f(y)$.
De plus,

$$\begin{aligned}|f_k(x_k) - f(x_0)| &\leq |f_k(x_k) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x_0)| \\ &\leq \|f_k - f\|_\infty + |f(x_k) - f(x_0)| \\ &\underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

car $(f_k)_k$ converge vers f dans $\mathcal{C}$, et donc f est continue.

On a donc finalement montré que F_n est fermé.

- F_n est d'intérieur vide :

Soit $f \in F_n$. On veut montrer que toute boule ouverte $B(f, \epsilon)$ rencontre F_n^c, ie

$$\exists g\ \mathcal{C} \text{ telle que } \|f - g\|_\infty < \epsilon \text{ et } \forall x \in [0,1], \exists y \in [0,1], \left|\frac{g(y) - g(x)}{y - x}\right| > n.$$

Par le théorème de Weierstrass, on sait qu'il existe un polynôme P tel que $\|P - f\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{2}$. Notons $M = \|P'\|_{\infty,[0,1]}$.
Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\epsilon N \geq 2(M + n + 1)$.
On découpe l'intervalle $[0,1]$ en $\bigcup_{k=0}^{N-1} \left[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\right]$, et on considère la fonction g_0 $\frac{1}{N}$-périodique que l'on définit sur $\left[0, \frac{1}{N}\right]$ par :

$$g_0(x) = \begin{cases} \frac{\epsilon N}{2} x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2N} \\ \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon N}{2} x & \text{si } \frac{1}{2N} \leq x \leq \frac{1}{N} \end{cases}$$

La fonction g_0 est continue sur $[0,1]$ et $\|g_0\|_\infty = \frac{\epsilon}{4}$.
Considérons alors la fonction $g \in \mathcal{C}$ définie par $g = P + g_0$ et montrons qu'elle répond bien à notre problème.
On a $\|f - g\|_\infty \leq \|f - P\|_\infty + \|g_0\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} < \epsilon$.
Et pour tout $x, y \in [0,1]$, $|g(y) - g(x)| \geq |g_0(y) - g_0(x)| - |P(y) - P(x)|$.

- $x \in [0,1]$, donc $\exists 0 \leq k \leq 2N - 1$ tel que $x \in \left[\frac{k}{2N}, \frac{k+1}{2N}\right]$. Alors pour $y_0 \in \left[x, \frac{k+1}{2N}\right]$, on a $|g_0(y_0) - g_0(x)| = \frac{\epsilon N}{2}|y_0 - x| > (M + n + 1)|y_0 - x|$.
- De plus par l'inégalité des accroissements finis on a, pour ce même y_0, $|P(y_0) - P(x)| \leq M|y_0 - x|$.

Donc finalement on a, $\forall x \in [0,1], \exists y \in [0,1]$ tel que :

$$|g(y) - g(x)| \geq (M + n + 1)|y_0 - x| - M|y_0 - x| = (n + 1)|y_0 - x| > n|y_0 - x|.$$

On a donc bien montré que F_n est d'intérieur vide.

Comme énoncé au départ, le lemme de Baire achève la démonstration.

□