201

Espaces de fonctions. Exemples et applications.

I/ Fonctions continues

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. (X,d) espace métrique compact.

1) Définition et premières propriétés

On note $\mathcal{C}(X,\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de X dans $\mathbb{K}$. C'est une algèbre unitaire commutative.

Ex 1 : Soit $a \in X$, $x \mapsto d(x,a) \in \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$

App 2 : Les idéaux maximaux de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ sont les $I_s = \{f \in \mathcal{C}(X,\mathbb{R}) ;\ f(s) = 0\}$ avec $s \in X$.
Les morphismes d'algèbre de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ sont l'application nulle et $f \mapsto f(s)$ pour $s \in X$.

On munit $\mathcal{C}(X,\mathbb{K})$ de la norme uniforme sur X, notée $\|\cdot\|$ et définie par $\|f\| = \max_{x \in X} |f(x)|$.

Thm 3 $\mathcal{C}(X,\mathbb{K})$ est un espace de Banach.

App 4 : Toute série de fonctions qui converge normalement converge uniformément.

Ex 5 : $x \in [0,1] \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ est continue.

2) Résultats de densité

Thm 6 : $\mathcal{C}(X,\mathbb{K})$ est séparable.

Thm 7 (Stone-Weierstrass). Toute sous-algèbre A séparante (i.e. $\forall x \neq y \in X$, $\exists f \in A$, $f(x) \neq f(y)$) contenant les constantes (et stable par conjugaison pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) est dense dans $\mathcal{C}(X,\mathbb{K})$.

App 8 : $H = \{x \in X \mapsto P(x)$ avec $P \in \mathbb{R}[X]\}$ dense dans $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$.

App 9 : L'ensemble des fonctions lipschitziennes est dense dans $\mathcal{C}(X,\mathbb{K})$.

Thm 10 : L'ensemble des fonctions continues nulle part dérivables de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

3) Résultats de compacité

Déf 11. Une partie H de $\mathcal{C}(X,\mathbb{K})$ est dite équicontinue en un point x_0 si elle satisfait la condition : $\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \forall x$ tq $d(x,x_0) \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$.
H est dite équicontinue si elle est équicontinue en chaque point de X.

Ex 12. Soit $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{C}(X,\mathbb{K})$ alors $H = \{f_1 \dots f_n\}$ équicontinue.

Thm 13 (Ascoli) : Une partie de $\mathcal{C}(X,\mathbb{K})$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}(X,\mathbb{K})$ si elle est bornée et équicontinue.

App 14 : Soit $\alpha \in]0,1]$. On munit Lip_α de la norme $N(f) = \|f\| + \sup_{0 \leq x < y \leq 1} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha}$.
Alors la boule unité fermée de Lip_α est compacte dans $\mathcal{C}([0,1])$.

App 15. Soient X, Y deux espaces métriques compacts et μ une mesure borélienne de masse finie sur Y. Soit $K \in \mathcal{C}(X \times Y)$.
L'opérateur linéaire

$$T : \mathcal{C}^0(Y) \to \mathcal{C}^0(X)$$
$$f \mapsto \left(x \mapsto \int_Y K(x,y) f(y)\, d\mu(y)\right)$$

est compact.

App 16. Tout sous espace fermé de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ ne contenant que des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ est de dimension finie.

II/ Espaces L^p ($1 \leq p \leq +\infty$)

Déf 17. Pour tout réel $1 \leq p < +\infty$, on définit :
$L^p(\mu) = \{f : (X,\mathcal{A}) \to (\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K}))$ mesurable ; $\int |f|^p d\mu < +\infty\}$ quotienté par la relation d'équivalence $=$ p.p.

- Soit $f : (X,\mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}^+}$. $\operatorname{supp\,ess}(f) = \inf\{M \geq 0,\ \mu(\{f > M\}) = 0\}$

Pour $f : (X,\mathcal{A}) \to \mathbb{K}$, on pose $\|f\|_\infty = \operatorname{supp\,ess}(|f|)$.
$L^\infty(\mu) = \{f : (X,\mathcal{A}) \to \mathbb{K}$ mesurable ; $\|f\|_\infty < +\infty\} / (\|\cdot\|_\infty = 0)$.

1) Premières propriétés

Prop 18 (Inégalité de Hölder) : Soient $f \in L^p(\omega)$, $g \in L^q(\omega)$ avec $p, q \in [1, +\infty]$ vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Alors $fg \in L^1(\omega)$ et $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$

Prop 19 (Inégalité de Minkowski) : Soient $p \in [1, +\infty]$ et $f, g \in L^p(\omega)$.
Alors $f+g \in L^p(\omega)$ et $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

Thm 20 (Riesz-Fischer) : $L^p(\omega)$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$

Cor 21 : Soient $(f_n)_n$ une suite de $L^p(\omega)$ et $f \in L^p(\omega)$ telles que $\|f_n - f\|_p \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Alors il existe une sous suite extraite $(f_{n_k})_k$ telle que :
- $f_{n_k}(x) \to f(x)$ ω pp $x \in X$
- $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ $\forall k$ et ω ppx, avec $h \in L^p(\omega)$

App 22 Soient $r, s \in [1, +\infty[$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\exists c \in \mathbb{R}^+$ $\forall y \in \mathbb{R}$ $|g(y)| \leq c|y|^{r/s}$
Alors $\Phi : f \in L^r(\omega) \longmapsto g \circ f \in L^s(\omega)$ est continue

Thm 23 (Echantillonnage de Shannon) : Développement 1
$BL^2(\mathbb{R}) = \{ f \in L^2(\mathbb{R}),\ \hat{f} = 0 \text{ pp sur } \mathbb{R} \setminus [-\pi, +\pi] \}$ est un espace de Hilbert dont une base hilbertienne est donnée par : $S_k(x) = \text{sinc}(\pi(x-k))$ $(k \in \mathbb{Z})$.
De plus, $\forall f \in BL^2(\mathbb{R})$, $\exists \tilde{f} \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ tq $\tilde{f} = f$ pp et $\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) \text{sinc}(\pi(\cdot - k))$ converge dans $L^2(\mathbb{R})$ et uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $\tilde{f}$.

2) Résultats de densité $(1 \leq p < +\infty)$ $(X, \mathcal{A}, \omega) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$

Thm 24 :
- L'ensemble des fonctions en escalier à support compact est dense dans $L^p(\lambda)$.
- L'ensemble $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ des fonctions continues à support compact est dense dans $L^p(\lambda)$

App 25 : $L^p(\mathbb{R})$ est séparable.

Déf 26 : On définit $\Phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{c} \exp\left(\frac{-1}{1-x^2}\right) & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

où c est défini tel que $\|\Phi\|_1 = 1$.
$\Phi_n(x) = n\,\Phi(nx)$

Prop 27 : $\Phi_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $\text{supp}\,\Phi_n \subset B(0, \frac{1}{n})$
$\Phi_n \geq 0$, $\int \Phi_n = 1$, $\forall \eta > 0$ $\lim_{n \to +\infty} \int_{|t| > \eta} \Phi_n(t)\,dt = 0$.

Thm 28 :
- Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$. Alors $(\Phi_n * f)_n$ est une suite de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ qui converge vers f dans $L^p(\mathbb{R})$.
- L'ensemble $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact est dense dans $L^p(\mathbb{R})$.

Rque 29 : Les résultats précédents se généralisent à Ω ouvert de $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 1)$.

App 30 (Lemme de Riemann-Lebesgue) : Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f \in L^1(]a, b[)$.
Alors $\lim_{|\lambda| \to +\infty} \int_a^b f(t) e^{-i\lambda t}\,dt = 0$.

III/ Fonctions holomorphes

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.

Déf 31 : Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Soit $z_0 \in \Omega$. Si $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe, on la note $f'(z_0)$ et on l'appelle dérivée de f en z_0. Si $f'(z_0)$ existe pour tout z_0 de Ω, on dit que f est holomorphe sur Ω.
On note $H(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω.

Ex 32 $z \mapsto z$, $z \mapsto \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n \in H(\mathbb{C})$

C-ex 33 $z \mapsto \bar{z} \notin H(\mathbb{C})$

1) Structure rigide des fonctions holomorphes

Thm 34 (Condition de Cauchy-Riemann). Soit $f = P + iQ : \Omega \to \mathbb{C}$ qui est $\mathbb{R}$ différentiable en $z_0 \in \Omega$. Alors on a équivalence entre
(i) f dérivable (au sens complexe) en z_0
(ii) $df(z_0)$ est $\mathbb{C}$-linéaire
(iii) $\frac{\partial P}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(z_0)$ et $\frac{\partial P}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(z_0)$

Ex 35 : $z \mapsto z^2 \in H(\mathbb{C})$ car $z^2 = \underline{x^2-y^2} + i\underline{2xy}$ est $\mathbb{R}$ différentiable et $\frac{\partial P}{\partial x} = 2x = \frac{\partial Q}{\partial y}$ et $\frac{\partial P}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial Q}{\partial x}$

C-ex 36 : L'hypothèse de $\mathbb{R}$-différentiabilité est nécessaire. $f(z) = \sqrt{|xy|}$ n'est pas dérivable en 0 bien que f et 0 possèdent des dérivées partielles vérifiant en 0 la condition (iii).

Thm 37 (Formule de Cauchy) : Soit f une fonction holomorphe sur Ω. Soit $a \in \Omega$, γ un chemin continu, fermé, à valeurs dans $\Omega \setminus \{a\}$ et homotope dans Ω à un point. On a alors :
$$I(\gamma, a) f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - a} d\xi$$

Rque 38 : La réciproque est aussi vraie à savoir que si f vérifie la formule de Cauchy dans Ω, alors elle est holomorphe sur Ω.

App 39 : Une suite de fonctions $(f_n)_n \in H(\Omega)^{\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f sur les compacts de Ω. Alors $f \in H(\Omega)$.

App 40 : $f \in H(\Omega) \Leftrightarrow f$ analytique sur Ω

App 41 : Ω ouvert connexe, $f \in H(\Omega)$, $f \neq 0$. Alors l'ensemble des zéros de f n'admet pas de point d'accumulation dans Ω (Thm des zéros isolés)

App 42 : Pour tout disque $D(a,r) \subset \Omega$, on a :
$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi$$ où C est le chemin correspondant au cercle $C(a,r)$ parcouru une fois

App 43 (Inégalités de Cauchy). Notons $M(r)$ le maximum de $|f|$ sur $C(a,r)$. Alors $|f^{(n)}(a)| \leq \frac{M(r)\, n!}{r^n}$

App 44 (Théorème de Liouville) : Toute fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ et bornée est constante.

App 45 (Théorème de D'Alembert). Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non constant possède au moins une racine complexe.

2) L'espace topologique $H(\Omega)$

Thm 46 (Montel) : Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $H(\Omega)^{\mathbb{N}}$ bornée sur les compacts de Ω (i.e normale : $\forall K \subset\subset \Omega\ \exists M_K > 0$ tq $\forall z \in K$, $|f(z)| \leq M_K$). Alors il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $f \in H(\Omega)$ telle que $f_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} f$ uniformément sur les compacts de Ω. (Développement 2)

App 47 (Thm de Carton). Soit Ω un ouvert connexe borné de $\mathbb{C}$ et $a \in \Omega$, $f \in H(\Omega, \Omega)$ telle que $f(a) = a$ et $f_n = f \circ \dots \circ f$. Alors :
i) $|f'(a)| \leq 1$
ii) $|f'(a)| < 1 \Rightarrow f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} c_a$ uniformément sur les compacts de Ω, où $c_a(z) = a$ pour tout z de Ω.

App 48. Il n'existe pas de norme sur $H(\Omega)$ définissant la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.