Espaces de fonctions : exemples et applications

20 1'

I. Espaces de fonctions continues sur un compact

Soit X un espace métrique compact, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1- Définitions - premières propriétés - norme uniforme

Def 1 : On note $C^{\mathbb{K}}(X)$ (ou $C(X)$) l'ensemble des fonctions continues de X dans $\mathbb{K}$.

Prop 2 : $C(X)$ est une algèbre unitaire commutative

Prop 3 : Une fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes.

Def 4 : On définit la norme uniforme, notée $\|.\|_\infty$, sur $C(X)$, par
$$\|f\|_\infty = \max_{x \in X} |f(x)|$$

Prop 5 : Une limite uniforme de fonctions continues est continue

C-ex 6 : $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^n$, f_n converge simplement vers $f = \mathbb{1}_{\{1\}}$ mais f n'est pas continue.

Prop 7 : (Lemme de Dini) ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de $C^{\mathbb{R}}(X)$ (ie $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X$, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$). Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f \in C^{\mathbb{R}}(X)$ alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f

Ex 8 : On définit la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $C^{\mathbb{R}}([-1,1])$ par
$P_0 = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1,1]$, $P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x^2 - P_n^2(x))$
Alors $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $x \longmapsto |x|$

Prop 9 L'espace $C(X)$ est un Banach séparable.

2- Sous-espaces denses de $C(X)$

Def 10 Soit H une partie de $C(X)$, H est dite séparante si $\forall (x,y) \in X^2$, $x \neq y$, $\exists h \in H$ tq $h(x) \neq h(y)$

Th 11 Toute sous algèbre de $C^{\mathbb{R}}(X)$ séparante et contenant les fonctions constantes est dense dans $C^{\mathbb{R}}(X)$

Def 12 : Soit H une partie de $C^{\mathbb{C}}(X)$, H est dite autoconjuguée si
$$\forall h \in H, \quad \overline{h} : x \longmapsto \overline{h(x)} \in C^{\mathbb{C}}(X)$$

Th 13 (Stone-Weierstrass complexe) Toute sous-algèbre de $C^{\mathbb{C}}(X)$ séparante autoconjuguée et contenant les fonctions constantes est dense dans $C^{\mathbb{C}}(X)$.

Ex 14 Les fonctions lipschitziennes sont denses dans $C(X)$

Ex 15 Si X est un compact de $\mathbb{R}^d$, l'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{K}$ et à d variables sont denses dans $C(X)$.

Prop 16 Les fonctions continues nulle part dérivables sont denses dans $C^0([0,1], \mathbb{R})$

3- Théorème d'Ascoli

Def 17 Une partie H de $C(X)$ est dite équicontinue en $x_0 \in X$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X$, $d(x,x_0) < \eta \Rightarrow \forall h \in H, |h(x) - h(x_0)| < \varepsilon$
Une partie H de $C(X)$ est dite équicontinue si elle est équicontinue en tout point de X.

Def 18 : Une partie H de $C(X)$ est dite uniformément équicontinue si $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$, $\forall x,y \in X$, $d(x,y) < \eta \Rightarrow \forall h \in H, |h(x) - h(y)| < \varepsilon$.

Prop 19 Une partie H de $C(X)$ est uniformément équicontinue si et seulement si elle est équicontinue.

Ex 20 : Soit C un réel positif, alors l'ensemble des fonctions C-lipschitziennes est équicontinue.

Th 21 (Ascoli) Soit H une partie de $C(X)$, alors H est relativement compacte dans $C(X)$ si et seulement si H est bornée et équicontinue

Ex 22 Soit $C > 0$, soit $\Pi > 0$, alors l'ensemble des fonctions C-lipschitziennes bornées par Π est relativement compact dans $C(X)$.

4 - Sous-espaces remarquables de $C(X)$

a) Les fonctions C^k et α-Höldériennes

Def 23 : Soit X un compact de $\mathbb{R}^d$, on définit $C^k(X)$ par
$C^k(X) := \{ f \in C(X)$ tq f k fois différentiable et ses k différentielles sont continues $\}$.

Prop 24 $C^k(X)$ est dense dans $C(X)$

Def 25 On munit $C^k(X)$ de la norme $\|.\|_{C^k}$ définie par
$$\|f\|_{C^k} = \sum_{\alpha=0}^{k} \|\partial^\alpha f\|_\infty$$

Prop 26 $(C^k(X), \|.\|_{C^k})$ est un Banach

Def 27 Soit α dans l'intervalle $]0,1[$. On définit l'espace des fonctions α-Holdériennes
$C^{0,\alpha} := \{ f \in C(X) \mid \exists C>0, \forall x,y \in X, |f(x)-f(y)| < C|x-y|^\alpha \}$.

Prop 28 $C^1(X) \subset C^{0,\alpha}(X) \subset C(X) \quad \forall \alpha \in]0,1[$.

Coro 29 Pour tout $\alpha \in]0,1[$, $C^{0,\alpha}(X)$ est dense dans $C(X)$

Def 30 On munit $C^{0,\alpha}(X)$ de la norme $\|.\|_\alpha$ définie par $\|f\|_\alpha = \|f\|_\infty + \sup_{x \neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}$

Prop 31 $(C^{0,\alpha}(X), \|.\|_\alpha)$ est un Banach.

b) Les fonctions holomorphes

Def 32: Soit X un connexe compact de $\mathbb{C}$. On note $H(X)$ l'ensemble des fonctions holomorphes de $C(X)$

Prop 33 (Th des zéros isolés) Soit $Z(f)$ l'ensemble des zeros de f, $f \in H(X)$.
Si $Z(f)$ admet un point d'accumulation, alors f est nulle sur X.

Th 34 (Prolongement analytique) Soient $f, g \in H(X)$ qui coincident sur un ouvert non vide de X, alors $f = g$ sur X

Ex 35 La fonction zêta définie sur $\Omega = \{ z \in \mathbb{C} \text{ tq } re(z) > 1 \}$ par
$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-\mathbb{N}\}$ de façon unique.

Th 36 (Convergence de Weierstrass) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions holomorphes dans X. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f
Alors f est holomorphe et $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge ——— vers f'

Coro 37 · $(H(X), \|.\|_\infty)$ est un Banach
· sur $H(X)$, la convergence uniforme implique la convergence $\|.\|_{C^k}$.

Th 38 (Th de Montel) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes dans X. On suppose que les f_n sont uniformément bornées sur X.
Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite qui converge uniformément vers $f \in H(X)$.

II Espaces de fonctions intégrables

Soit $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré
On considère les espaces $L_p(\mu)$ munis de la norme $\|.\|_p$, $p \in [1, +\infty]$.

1. Définitions - propriétés

Prop 39 Pour tout $p \in [1,+\infty]$, $(L_p(\mu))$ est un espace vectoriel, mais pas une algèbre

Ex 40 $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} \in L_1([0,1])$ mais $x \mapsto \frac{1}{x} \notin L_1([0,1])$

Prop 41 (Inégalité de Holdër) Soit $f \in L_p$, soit $g \in L_q$ tq $1 < p, q < +\infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
Alors $fg \in L_1$ et $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$

Prop 42 (Inégalité de Minkowski) Soient $f, g \in L_p$, alors $f+g \in L_p$
et $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

Th 43 (Riesz-Fischer) Si $1 \leq p \leq +\infty$, alors $(L_p, \|.\|_p)$ est complet.] DEV 1

Prop 44 Soit $p \in [1, +\infty]$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de L^p qui converge vers f pour la norme $\|.\|_p$. Alors il existe une sous-suite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers f μpp.

Th 45: Soit H une partie de $L_p(\mathbb{R}^d)$ tq : H est bornée pour la norme L_p,
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ \forall t \in \mathbb{R}^d, |t| < \delta \Rightarrow (\forall f \in H, \|\tau_t f - f\|_p < \varepsilon)$,
$\forall \varepsilon > 0, \exists K \subset \mathbb{R}^d$ compact tq $\|f - 1_{\{K\}} f\|_p < \varepsilon$.
Alors H est relativement compact dans $L_p(\mathbb{R}^d)$.

2. parties denses.

Def 46 On note $C_c(X)$ l'ensemble des fonctions continues de X dans $\mathbb{K}$ à support fini

Prop 47 L'espace $C_c(X)$ est dense dans $(L^p, \|.\|_p)$ pour tout $p \in [1,+\infty[$

Prop 48 L'espace $C_c^\infty(X)$ est dense dans $(L^p, \|.\|_p)$ ———

Prop 49 Pour tout $p \in [1, +\infty[$, l'ensemble des fonctions étagées est dense dans $(L^p, \|.\|_p)$

3. Dualité

Def 50 Soient $p, p' \in]1, +\infty[$, p et p' sont dits conjugués si $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Prop 51 Soit $g \in L^{p'}$ alors $T_g : L^p \longmapsto \mathbb{K}$
$$f \longmapsto \int_X f(x)g(x)d\mu$$
est un élément de $(L^p)'$

Prop 52 L'application $\phi : L^{p'} \longmapsto (L^p)'$ est un isomorphisme
$$g \longmapsto T_g$$
et $\|T_g\|_{(L^p)'} = \|g\|_{p'}$

Ex 53 Si $p = 2$ alors $\frac{1}{p} + \frac{1}{p} = 1$ donc L^2 est autodual

4- L^2

Prop 54 : L'application $\langle , \rangle : L^2 \times L^2 \longmapsto \mathbb{K}$
$$(f,g) \longmapsto \int_X f(x)\overline{g(x)}d\mu$$
est un produit scalaire.

Prop 55 La norme induite par $\langle , \rangle$ est exactement la norme $\|.\|_2$

Prop 56 : L'espace $(L_2, \|.\|_2)$ est un espace de Hilbert

Rque 57 : On retrouve le fait que L^2 est autodual par le théorème de représentation de Riesz.

Ex 58 La famille $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de $L^2_{\mathbb{C}}(]0,1[)$ définie par
$f_n : x \longmapsto e^{2i\pi n x}$ est une base hilbertienne de $L^{\mathbb{C}}_2(]0,1[)$

III Transformée de Fourier

1- Espace de Schwartz

Def 59 : Soit $f \in C(\mathbb{R}^d)$, on dit que f est à décroissance rapide si
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ |x^m f(x)| \underset{|x| \longmapsto +\infty}{\longmapsto} 0$$

Def 60 On appelle espace de Schwartz $S(\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions f de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$ telles que f est C^∞ sur $\mathbb{R}^d$ et f ainsi que toutes ses dérivées sont à décroissance rapide.

Ex 61 : $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, $x \longmapsto e^{-1/x^2}$ est dans $S(\mathbb{R})$

Prop 62 $S(\mathbb{R}^d)$ est un espace vectoriel stable par dérivation, produit et multiplication par un polynôme.

Def 63 Soit $f \in S(\mathbb{R}^d)$, on définit la transformée de Fourier de f par
$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle \xi, x\rangle}dx$$

Prop 64 : L'espace $S(\mathbb{R}^d)$ est stable par transformée de Fourier.

Th 65 : La transformée de Fourier est une application linéaire bijective bicontinue de $S(\mathbb{R}^d)$ sur $S(\mathbb{R}^d)$
$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{i\langle x, \xi\rangle}d\xi.$$

2. $L^2(\mathbb{R})$

Prop 66 : $S(\mathbb{R}^1)$ est dense dans $(L^2(\mathbb{R}^1), \|.\|_2)$

Coro 67 : On peut étendre la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}^1)$

Def 68 : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle fonction poids $\rho : I \longmapsto \mathbb{R}$ mesurable positive à support fini tq $\forall n \in \mathbb{N}, \int_{\mathbb{R}} |x|^n \rho(x)dx < +\infty$

Def 69 : On définit $L^2(I,\rho)$ l'ensemble des fonctions $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ tq $\int_I |f(x)|^2\rho(x)dx < +\infty$.
On munit cet espace du produit scalaire $\langle f,g\rangle = \int_I f(x)g(x)\rho(x)dx$

Prop 70 : $(L^2(I,\rho), \langle . \rangle)$ est un espace de Hilbert.

Prop 71 $L^2(I,\rho)$ contient les polynômes et donc, par Gram-Schmidt, une famille de polynômes orthogonaux $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Prop 72 : Si il existe $a > 0$ tq $\int_I e^{a|x|}\rho(x) < +\infty$ alors la famille de polynômes orthogonaux $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décrite ci-dessus est dense dans $L^2(I,\rho)$: c'est une base hilbertienne. DEV 2

Ex 73 : Les polynômes de Legendre, les polynômes de Hermite