201 : ESPACES DE FONCTIONS. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

I. Espaces de fonctions régulières.

1) Généralités $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit (X,d) espace métrique.

Def 1 : On note $C(X,\mathbb{K})$ l'espace des fonctions continues de X dans $\mathbb{K}$.

prop 2 : Uniformément continue $\Rightarrow$ continue.

contre ex 3 : $f :]0;1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ C^0 et pas UC^0

ex 4 : Les fonctions lipschitziennes sont uniformément continues.

Théorème 5 : Heine : Soit $f \in C(X,\mathbb{K})$.

X compact $\Rightarrow$ f est UC^0

proposition 6 : Soit $f \in C(X,\mathbb{K})$; si X compact alors f bornée et atteint ses bornes.

• $\boxed{\text{Dans la suite : } (X,d) \text{ compact}}$

Def 7 : $\|\cdot\|_\infty : C(X,\mathbb{K}) \to \mathbb{R}_+$, $f \mapsto \sup_{x\in X} |f(x)|$ est une norme.

La topologie est celle de la cv uniforme.

Soit $k \in \mathbb{N}$: $\|\cdot\|^k : C^k(X,\mathbb{K}) \to \mathbb{R}_+$, $f \mapsto \sum_{\ell \leq k} \|f^{(\ell)}\|_\infty$ avec $X \subset \mathbb{R}$

proposition 8 :

• $(C(X,\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ est un Banach

• si $X \subset \mathbb{R}$: $\forall k \geq 1$: $(C^k(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|^k)$ Banach.

2) Parties compactes :

Def 9 : Soit $H \subset C(X,\mathbb{K})$: H est dite équicontinue en $x_0 \in X$ si : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X : d(x,x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

• H est équicontinue si elle est équicontinue en tout point.

Ex 10 : Soit $k \geq 0$: l'ensemble des fonctions k-lip. est équicontinu.

Théorème 12 : Ascoli : $A \subset C(X,\mathbb{K})$ est relativ. compacte ssi :
• A est équicontinue.
• $\forall x \in X$: $A_x := \{f(x), f \in A\}$ rel. compacte

App 13 : Soient X, Y 2 métriques compacts, $K \in C(X \times Y, \mathbb{K})$ μ une mesure borélienne de Y ; $\mu(Y) < +\infty$.

On def : $T : C(Y,\mathbb{K}) \to C(X,\mathbb{K})$, $f \mapsto Tf : x \mapsto \int_Y K(x,y) f(y) d\mu(y)$

Alors T est un opérateur compact, i.e. : l'image de la boule unité fermée de $C(Y,\mathbb{K})$ est rel. compact dans $C(X,\mathbb{K})$.

3) Parties denses.

Théorème 15 : Weierstrass : Toute fonction continue de $[a;b] \to \mathbb{C}$ est limite uniforme de polynômes. DVT 1

App 16 : Soit $f : [0;1] \to \mathbb{C}$ continue :
$\forall n \in \mathbb{N}$: $\int f t^n dt = 0 \Rightarrow f \equiv 0$.

Thm 17 : L'ensemble des fonctions continues nulle part dérivable de $C([0;1],\mathbb{R})$ est dense dans $C([0;1],\mathbb{R})$. DVT 2

ex 18 : On note $\Delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 1 p ; $\forall x \in [-1/2, 1/2]$: $\Delta(x) = |x|$

Alors : $f : x \mapsto \sum_{p \geq 0} \frac{1}{2^p} \Delta(2^p x)$ est C^0 nulle part dériv.

4. Fonctions Holomorphes : $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert.

Def 19 : $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe si elle est $\mathbb{C}'$ et : $\forall x \in \Omega$: $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{C}}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ existe.

ex 20 : $z \mapsto \exp(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, $z \mapsto \frac{1}{z} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$

Th 21 : Cauchy : si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, K compact à bord réguliers : $\int_{\partial K} f = 0$.

Théorème 22. formule de Cauchy

Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $\forall K$ compact à bord régulier $\subset \Omega$, $\forall z \in \mathring{K}$: $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$.

Appli 23 : $f \in \mathcal{H}(\Omega) \Rightarrow f \in \mathcal{A}(\Omega)$ (analytique)

Théo 24 : Prolongement analytique :

On suppose Ω connexe : si f et $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $\exists A \subset \Omega$ une partie contenant un point d'acc ; $f|_A = g|_A$ alors : $f = g$.

App 25 : Soit $z \in \{y \in \mathbb{C} ; \operatorname{Re}(y) > 0\}$: $u : x \mapsto e^{-z|x|^2}$

Alors : $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\hat{u}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{z}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4z}}$

Théorème 26 : Complétude : • $\mathcal{H}(\Omega)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact est complet par la métrique induite.

• $\mathcal{H}(\Omega) \subset C^\infty(\Omega)$ et si $f_n \xrightarrow[\mathcal{H}(\Omega)]{CVUSTC} f$, $\forall k \geq 0$: $f_n^{(k)} \xrightarrow{CVUSTC} f^{(k)}$ et $f \mapsto f' \in C^0(\mathcal{H}(\Omega))$

App 27 : $s \mapsto \zeta(s) = \sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$ holomorphe sur $\{\operatorname{Re} > 0\}$

II. Les applications linéaires continues :

Soit E, F 2 $\mathbb{K}$-evn, $\mathcal{L}(E,F)$ fct lin $E \to F$

Th 28 : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est continue sur E, (ii) f est continue en 0.

(iii) f est bornée sur $\overline{B(0,1)}$ (iv) f est bornée sur $S(0,1)$

(v) $\exists M > 0$; $\forall x \in E$: $\|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E$ (vi) f est lipschitzienne

(vii) f est UC^0.

Def 29 : On note $\mathcal{L}_c(E,F)$ l'ensemble $C^0(E,F) \cap \mathcal{L}(E,F)$.

$|||\cdot||| : \mathcal{L}_c(E,F) \to \mathbb{R}_+$, $f \mapsto \sup\limits_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F$ est la norme subordonnée à $\|\cdot\|_F$, $\|\cdot\|_E$

prop 30 : Soit G un $\mathbb{K}$-evn.

$\forall f \in \mathcal{L}_c(E,F)$, $g \in \mathcal{L}_c(F,G)$: $g \circ f \in \mathcal{L}_c(E,G)$ et $\|f \circ g\| \leq \|f\| \|g\|$

• $\mathcal{L}_c(E,E) = \mathcal{L}_c(E)$ est une alg. normée

Th. 31 : F Banach $\Rightarrow \mathcal{L}_c(E,F)$ Banach

App 32 : Le dual topologique $E' := \mathcal{L}_c(E,\mathbb{K})$ est un Banach.

prop 33 : Une forme linéaire est C^0 ssi son noyau est fermé dans E.

Th 34 : E de dim finie : $\mathcal{L}_c(E,F) = \mathcal{L}(E,F)$

Théo 35 : Banach-Steinhauss :

Soit E un Banach. F evn : Soit $(T_i)_{i \in I} \in \mathcal{L}_c(E,F)^I$ sont éq : (i) $\sup\limits_{i \in I} \|T_i\| = +\infty$

(ii) $\exists x \in E$; $\sup\limits_{i \in I} \|T_i x\| = +\infty$.

• si (i) vérifiée : $\{x \in E$; (ii) vérifiée$\}$ est G-dense.

App 36 : $\{f \in C^0_{2\pi-p}$; $\sum c_n(f)(0)$ div$\}$ G-dense dans $C^0_{2\pi p}$

III - Espaces L^p

Dans cette partie, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré.

1) Structure

Déf 37 : . Soit $p \in \mathbb{R}$, avec $1 \leq p < +\infty$

$L^p(\mu) := \{ f : X \to \mathbb{K}$ mesurable, $\|f\|_p < +\infty \} / \|\cdot\|_p = 0 \}$

où $\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p d\mu \right)^{1/p}$

. pour $p = +\infty$, on pose

$L^\infty(\mu) := \{ f : X \to \mathbb{K}$ mesurable, $\|f\|_\infty < +\infty \} / \|\cdot\|_\infty = 0 \}$

où $\|f\|_\infty = \mathrm{Inf}\{ C > 0, |f(x)| \leq C$ μ p.p. sur $X \}$

Thm 38 : (Inégalité de Hölder).
Soit $f \in L^p$, $g \in L^q$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, et $1 \leq p \leq +\infty$. Alors $f \cdot g \in L^1$ et $\int |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_q$

Thm 39 : (Inégalité de Minkowski).
Soit $f, g \in L^p$ et $1 \leq p \leq +\infty$. On a : $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

Rque : L^p est un evn muni de $\|\cdot\|_p$ (pour tout $1 \leq p \leq +\infty$)

DVT 3

Thm 40 : (Riesz-Fisher)
L^p est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq +\infty$.

Coro 41 : Soit $(f_n) \in (L^p)^{\mathbb{N}}$ et $f \in L^p$ tq $\|f_n - f\|_p \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$
Alors il existe une sous-suite (f_{n_k}) tq
(a) $f_{n_k}(x) \xrightarrow[k \to +\infty]{} f(x)$
(b) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ $\forall k$ et μ-p.p sur X, avec $h \in L^p$.

Coro 42 : $L^2(\mu)$ muni du produit scalaire
$(f, g)_2 := \int_X f \bar{g} \, d\mu$ est un espace de Hilbert sur $\mathbb{K}$.

Rque : $L^2(\mu)$ vérifie donc le théorème de projection sur un convexe fermé et le théorème de Riesz.

2) Parties denses

Thm 43 : On se place dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. L'ensemble $\mathcal{C}_K(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ des fonctions continues à support compact est dense dans $L^p(\lambda)$ pour $1 \leq p < +\infty$.

Thm / Déf 44 : Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$, avec $1 \leq p \leq \infty$.
Alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$, la fonction $y \mapsto f(x-y) g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^N$. On pose
$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y) g(y) \, dy$. Alors
$f * g \in L^p$ et $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$

Prop 45 : Si $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, alors $f * g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Déf 46 : On appelle suite régularisante une suite de fonctions $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tq :
$\rho_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\mathrm{supp}(\rho_n) \subset B(0; 1/n)$, $\int \rho_n = 1$ et $\rho_n \geq 0$ sur $\mathbb{R}^N$.

Ex 47 : $\rho(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{|x|^2 - 1} \right) & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$

On pose $\rho_n(x) = C n^N \rho(nx)$ avec $C = (\int \rho)^{-1}$

Thm 48 : Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ avec $1 \leq p < \infty$. Alors $\rho_n * f \to f$ dans L^p.

Coro 49 : Soit $\Omega \in \mathbb{R}^N$ ouvert. Alors $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$.

3) Le cas de L^2

Prop 50 : $L^1 \cap L^2$ est dense dans L^2

Appli 51 : Prolongement de la transformée de Fourier à L^2.

Déf 52 : On appelle fonction poids $\rho : I \to \mathbb{R}$ toute fonction mesurable strictement positive telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_I |x|^n \rho(x) \, dx < +\infty$.

Déf 53 : On note $L^2(I, \rho)$ muni du produit scalaire
$\langle f, g \rangle_\rho := \int_I f(x) \overline{g(x)} \rho(x) \, dx$.

Prop 54 : Il existe une unique famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes unitaires orthogonaux 2 à 2 tq $\deg P_n = n$. Cette famille s'appelle polynômes orthogonaux associés à ρ.

Thm 55 : Densité des polynômes orthogonaux (qui forment une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$). DVT 4

Déf 56 : Soit Ω domaine borné de $\mathbb{C}$, distinct de $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$ le disque ouvert unité.
On appelle espace de Bergman sur Ω :
$B^2(\mathbb{D}) = \{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}), \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 \, dx \, dy < \infty \}$ muni du produit scalaire. DVT 5

Lemme 57 : Pour tout compact K de $\mathbb{D}$ on a :
$\forall f \in B^2(\mathbb{D})$, $\|f\|_{\infty, K} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi} \, d(K, S^1)} \|f\|_2$

DVT 5

Prop 58 : $B^2(\mathbb{D})$ muni du produit scalaire de $L^2(\mathbb{D})$ est un espace de Hilbert.

Prop 59 : La famille $(e_n)_n$ forme une base hilbertienne de $B^2(\mathbb{D})$.

4) Relations d'inclusion :

Prop 60 : Si $\mu(X) < \infty$ alors $1 < p \leq q \Rightarrow L^q(\mu) \subset L^p(\mu)$

C-ex 61 : $\frac{\mathbb{1}_{]0,1]}}{\sqrt{\cdot}} \in L^1(\lambda) \setminus L^2(\lambda)$ et $\frac{1}{\sqrt{(\cdot)^2+1}} \in L^2(\lambda) \setminus L^1(\lambda)$

il n'y a aucune inclusion entre $L^1(\lambda)$ et $L^2(\lambda)$.

Références :

- Gourdon (Analyse)
- Hirsch, Lacombe (Éléments d'analyse fonctionnelle)
- Zuily, Quéffélec (Analyse pour l'agrégation)
- Amar, Matheron (Analyse complexe)
- Brézis (Analyse fonctionnelle)
- Briane Pagès (Théorie de l'intégration)
- Rudin (Analyse réelle et complexe)
- Objectif Agrégation
- Bayen, Margaria, (Espaces de Hilbert et opérateurs)