

LEÇON 201: Espaces de fonctions, exemples et applications

Antoine HUMEAU et David LOISEAUX

Table des matières

1 Espace de fonctions continues	1
1.1 Convergence simple et uniforme	1
1.1.1 Cas où $F = \mathbb{R}$	1
1.2 Parties compactes	2
1.3 Parties denses	3
2 Espace de fonctions régulières	3
2.1 Espaces C^k	3
2.2 Espaces C^∞	4
2.3 L'espace de Schwartz et transformée de Fourier	4
2.3.1 L'espace dual de S	5
2.4 Espace de fonctions holomorphes	5
3 Espace de fonctions intégrables	5
3.1 Les espaces $L^p(\mu), 1 \leq p < \infty$	6
3.2 L'espace $L^\infty(\mu)$	7
3.3 L'espace $L^2(\mu)$	7

1 Espace de fonctions continues

1.1 Convergence simple et uniforme

Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques.

Définition 1.1. Soit (f_n) une suite de fonctions de E dans F et $f : E \rightarrow F$.

— On dit que (f_n) converge simplement vers f si pour tout $x \in E$, $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x)$.

— On dit que (f_n) converge uniformément vers f si $\sup_{x \in E} \{\delta(f_n(x), f(x))\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

Proposition 1. Si la suite (f_n) est formée de fonctions continues et converge uniformément vers f alors f est continue.

Exemple 1.1. La suite de fonction $x \mapsto x^n$ sur $[0; 1]$ converge simplement vers $\mathbf{1}_1$, qui n'est pas continue.

Proposition 2. Sur l'espace $C_b(E, F)$ l'application D définie par

$$D(f, g) = \sup_{x \in E} \delta(f(x), g(x))$$

pour tout $f, g \in C_b(E, F)$ est une métrique. Il est complet dès que F l'est. En particulier si F est Banach alors $C_b(E, F)$ est un espace de Banach.

1.1.1 Cas où $F = \mathbb{R}$

On ajoute une structure supplémentaire : l'ordre total.

Théorème 1.1 (de Dini 1). Soit $a < b$ deux réels. Soient (f_n) une suite croissante de fonctions continues qui converge simplement vers f continue sur le segment $[a; b]$. Alors la convergence est uniforme.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $A_n = \{x \in [a; b], |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}$ ($n \in \mathbb{N}$). C'est un ouvert ($f_n - f$ est continue en effet) et on a pour $p \geq n$, $A_n \subset A_p$ par croissance de la suite. Il existe un recouvrement fini de $[a; b]$ par de tels ouverts et la conclusion s'en suit directement. \square

Remarque. On fait exactement la même chose pour des fonctions définies sur un espace topologique K compact.

Théorème 1.2 (de Dini 2). Soit $a < b$ deux réels. Soient (f_n) une suite de fonctions continues croissantes qui converge simplement vers f continue sur le segment $[a; b]$. Alors la convergence est uniforme.

Démonstration. f étant continue sur le segment $[a; b]$ elle y est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [a; b], |x - y| \leq \alpha \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Soit donc $x_0 = a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_N \leq b = x_{N+1}$ tels que $|x_i - x_{i+1}| < \alpha$ pour $i = 0, \dots, N$.

Il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$|f_n(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon, \quad i \in \{0, 1, \dots, N + 1\}.$$

Soit $x \in [a; b]$ et $i \in \{0, \dots, N\}$ tel que $x \in [x_i, x_{i+1}]$. Alors pour $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\leq |f_n(x) - f_n(x_i)| + |f_n(x_i) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x)| \\ &\leq |f_n(x_{i+1}) - f_n(x_i)| + \varepsilon + |f(x_i) - f(x_{i+1})|. \end{aligned}$$

Or $|f(x_i) - f(x_{i+1})| \leq \varepsilon$ et puisque $|f_n(x_{i+1}) - f_n(x_i)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |f(x_i) - f(x_{i+1})|$, il existe $n_1 \geq n_0$ tel que, pour tout $n \geq n_1$, $|f_n(x_{i+1}) - f_n(x_i)| < 3\varepsilon$. En reprenant les inégalités précédentes, $\forall n \geq n_1$,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq 3\varepsilon.$$

□

Remarque. Attention! Dans les deux théorèmes de Dini il faut supposer f continue. Normalement c'est un corollaire de la convergence uniforme mais ici on s'en sert pour la montrer.

On ne se sert pas de la continuité des f_n dans le deuxième théorème. Dans le premier théorème de Dini on joue sur la compacité "horizontale", celle du segment de définition.

Dans le second on utilise la compacité "verticale".

Le théorème de Dini 1 est utilisé pour la preuve du théorème de Stone-Weierstrass.

Un résultat plus faible est donné par le théorème de Baire.

Théorème 1.3. Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonction continues sur $[0; 1]$ qui converge simplement vers f . Les points de continuité de f sont alors denses dans $[0; 1]$.

1.2 Parties compactes

Définition 1.2. Une famille \mathcal{F} de fonction de E dans F est équicontinue si

$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall f \in \mathcal{F}, f(B(x, \eta)) \subset B(f(x), \varepsilon).$$

Théorème 1.4 (d'Ascoli). Soit (K, d) métrique compact et (Y, δ) métrique. On munit $E = \mathcal{C}(K, Y)$ de la topologie de convergence uniforme.

Une famille $\mathcal{F} \subset E$ est d'adhérence compacte si et seulement si

1. \mathcal{F} est équicontinue,
2. $\forall x \in K, \{f(x), f \in \mathcal{F}\} \subset C_x$ compact.

Démonstration. Sens direct. Soit \mathcal{F} une partie d'adhérence compacte que l'on suppose non vide. On veut montrer les deux points du dessus.

Le second point est le plus aisé. Soit $x \in K$, alors $\theta : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & Y \\ f & \mapsto & f(x) \end{array}$ est continue et comme $\overline{\mathcal{F}}$ est compact, $\theta(\overline{\mathcal{F}})$ est compact.

Soit $\varepsilon > 0$. Par compacité de \mathcal{F} il existe f_1, \dots, f_n des fonctions de \mathcal{F} telles que

$$\mathcal{F} \subset \bigcup_{i=1}^n B_\infty(f_i, \varepsilon/3)$$

La famille $\{f_1, \dots, f_n\}$ est uniformément équicontinue car finie. Soit donc $\eta > 0$ tel que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall x, y \in K, d(x, y) < \eta \implies \delta(f_i(x), f_i(y)) < \varepsilon.$$

Prenons $f \in \mathcal{F}$, il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $f \in B_\infty(f_i, \varepsilon/3)$. Alors pour $x, y \in K$ avec $d(x, y) < \eta$,

$$\delta(f(x), f(y)) \leq \delta(f(x), f_i(x)) + \delta(f_i(x), f_i(y)) + \delta(f_i(y), f(y)).$$

Chacun des termes de la somme ci-dessus est $\leq \varepsilon/3$.

Sens réciproque. On suppose que l'on dispose de \mathcal{F} vérifiant les deux points du théorème et on veut montrer que cette partie est d'adhérence compacte. Prenons D une partie dense et dénombrable de K .

Étape 1. Si (f_n) est une suite de fonctions de \mathcal{F} qui converge en tous points de D , alors (f_n) converge simplement. Soit $x \in K$. Considérons $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$ suite de points de D qui converge vers x . Pour $p < q$ des entiers,

$$\delta(f_p(x), f_q(x)) \leq \delta(f_p(x), f_p(x_n)) + \delta(f_p(x_n), f_q(x_n)) + \delta(f_q(x_n), f_q(x)).$$

En utilisant l'équicontinuité de \mathcal{F} en x , pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall p \geq 0, f_p(B(x, \eta)) \subset B(f_p(x), \varepsilon)$ ce qui permet de contrôler les deux termes extérieurs de la somme en prenant n suffisamment grand. Le terme du milieu est contrôlé ensuite grâce au fait que (f_n) converge sur D . On utilise ici le fait que C_x est compact donc complet, la suite $(f_p(x))_{p \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy donc converge dans C_x .

Étape 2. La limite f de cette suite est uniformément continue.

Puisque \mathcal{F} est équicontinue, elle est uniformément équicontinue (Heine). En particulier $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ est uniformément équicontinue. En passant à la limite dans la définition de l'uniforme équicontinuité on a ce que l'on souhaite. En effet soit $\varepsilon > 0$ et η de l'uniforme équicontinuité. Pour $x, y \in K$ tels que $d(x, y) < \eta$, on a pour tout $n \geq 0, \delta(f_n(x), f_n(y)) < \varepsilon$ et comme la distance δ est continue sur (Y, δ) , on peut passer à la limite sur n . L'inégalité devient alors large mais f est bien uniformément continue.

Étape 3. La convergence est en réalité uniforme.

Soit $\varepsilon > 0$ et η de l'uniforme équicontinuité pour $\varepsilon/3$. On recouvre K par une famille finie $\{x_1, \dots, x_n\}$ de boules de rayon η .

Pour $x \in K$, il existe $1 \leq j \leq n$ tel que $d(x, x_j) < \eta$ donc

$$\delta(f_n(x), f(x)) \leq \delta(f_n(x), f_n(x_j)) + \delta(f_n(x_j), f(x_j)) + \delta(f(x_j), f(x))$$

La majoration est uniforme en x ce qui permet de conclure.

Étape 4. Pour la dernière étape, on construit une sous suite d'une suite d'éléments de \mathcal{F} par le procédé d'extraction de diagonale de Cantor. Les points de convergence de cette suite extraite sont les points de D . Les trois premières étapes permettent alors de dire que cette sous-suite converge uniformément vers une fonction continue. \mathcal{F} est donc compact par critère séquentiel. \square

Application

Proposition 3. Une suite de fonctions 1-lipschitzienne sur $[0; 1]$ qui converge simplement admet une sous-suite qui converge uniformément.

1.3 Parties denses

Théorème 1.5 (de Stone-Weierstrass). Soit X un espace topologique compact et $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ une sous-algèbre qui sépare les points et telle que pour tout $x \in X$, il existe $h \in \mathcal{A}$ avec $h(x) \neq 0$. Alors $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

Corollaire 1. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un segment. L'ensemble des fonctions polynômiales réelle définies sur \mathbb{R} forment une partie dense au sens de la norme uniforme dans les fonctions continues sur I à valeurs réelles.

Applications

Théorème 1.6 (de Müntz). Soit \mathcal{C} l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0; 1]$ et à valeurs réelles. on muni cet espace de la norme infinie. Soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs strictement croissante telle que $\alpha_0 = 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n > 1$.

$$\text{Vect}_{n \in \mathbb{N}}(x \mapsto x^{\alpha_n}) \text{ est dense dans } \mathcal{C} \text{ si et seulement si } \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{\alpha_n} = \infty.$$

2 Espace de fonctions régulières

2.1 Espaces C^k

Définition 2.1. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et $k \in \mathbb{N}$. On définit l'espace des fonctions k -fois différentiables dans Ω à valeurs dans \mathbb{C} dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre k sont continues dans Ω . On note :

$$C^k(\Omega) = \{f \in C^{k-1}(\Omega) \mid \partial_{x_i} f \text{ existe et } \partial_{x_i} f \in C^{k-1}(\Omega), i = 1, \dots, n\}, k \geq 1.$$

Lemme 2.1. Posons pour $i > 0$:

$$K_i = \left\{ x \in \Omega \mid d(x, \Omega^c) \geq \frac{1}{i} \right\} \cap \{|x| \leq i\}.$$

Alors :

- K_i est compact et $K_i \subset \overset{\circ}{K}_{i+1}$, $i \geq 1$,
- $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$,
- pour tout compact K de Ω il existe i tel que $K \subset K_i$

Remarque. La fonction

$$d: (f, g) \in C^k(\Omega) \times C^k(\Omega) \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{p_i(f-g)}{1+p_i(f-g)} \in \mathbb{R}_+$$

défini une distance sur $C^k(\Omega)$, où les $p_i: f \in C^k \mapsto \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{K_i} |\partial^\alpha f| \in \mathbb{R}_+$.

Théorème 2.2. $(C^k(\Omega), d)$ est un espace métrique complet, de plus, on a l'équivalence, pour $(f_j)_j$, $f \in C^k(\Omega)$:

$$d(f_j, f) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \forall |\alpha| \leq k, (\partial^\alpha f_j) \text{ converge uniformément sur tout compact de} \\ \Omega \text{ vers } \partial^\alpha f. \end{cases}$$

2.2 Espaces C^∞

De même la fonction

$$d: (f, g) \in C^\infty(\Omega) \times C^\infty(\Omega) \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{p_i(f-g)}{1+p_i(f-g)} \in \mathbb{R}_+$$

définit une distance sur $C^\infty(\Omega)$, pour les $p_i: f \in C^\infty \mapsto \sum_{|\alpha| \leq i} \sup_{K_i} |\partial^\alpha f(x)| \in \mathbb{R}_+$.

Théorème 2.3. L'espace (C^∞, d) est un espace métrique complet, et sa topologie est la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de toutes les dérivées.

Théorème 2.4. Les compacts de $C^\infty(\Omega)$ sont les fermés bornés.

Attention ce n'est pas vrai pour $C^k(\Omega)$ avec $k \in \mathbb{N}$. Par exemple avec $k = 1$ la boule $B_f(0, 1)$ est fermée bornée et pourtant une suite (f_n) de cette boule vérifie seulement que $\|f'_n\|_\infty \leq 1$ mais donc la suite des dérivées (f'_n) n'est pas forcément équicontinue et n'a donc pas de raison d'avoir une valeur d'adhérence.

Exemple 2.1. Considérons $\Omega =]0; 1[$. Soit $g = \mathbf{1}_{]0, 1/2]}$, f sa primitive telle que $f(0) = 0$ et (f_n) une suite de fonctions C^1 avec $\|f'_n\|_\infty \leq 1$ telle que $f'_n \xrightarrow{CVS} g$ alors $f_n \xrightarrow{CVU} f$ quitte à translater (Ascoli), mais g n'est pas continue. La boule unité de $C^1([0; 1], \mathbb{R})$ n'est donc pas compacte.

2.3 L'espace de Schwartz et transformée de Fourier

Définition 2.2. L'espace $S = S(\mathbb{R}^n)$ est constitué des fonction u appartenant à $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \exists C_{\alpha, \beta} > 0, |x^\alpha \partial^\beta u(x)| \leq C_{\alpha, \beta}, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Exemple 2.2. — $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset S$

— $x \in \mathbb{R}^n \mapsto e^{-|x|^2} \in S$

Définition 2.3. Pour $u \in S$ la transformée de Fourier de u que l'on note \hat{u} ou $\mathcal{F}u$ est la fonction sur \mathbb{R}^n définie par,

$$\hat{u} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} u(x) dx, \xi \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

Exemple 2.3. Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re}(z) > 0$, soit $u(x) := e^{-z|x|^2}$. On a :

$$\hat{u}(\xi) = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{z}} \right)^n e^{-\frac{|\xi|^2}{4z}}.$$

Théorème 2.5. La transformation de Fourier \mathcal{F} est une application linéaire bijective de S sur S . Son inverse $\overline{\mathcal{F}}$ est donnée par :

$$\overline{\mathcal{F}}v(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} v(\xi) d\xi \quad (2)$$

La transformée de Fourier vérifie les propriétés suivantes.

Théorème 2.6. Pour $u, v \in S$ on a,

1. $\int \hat{u} v dx = \int u \hat{v} dx$
2. $\int u \overline{\hat{v}} dx = (2\pi)^{-n} \int \hat{u} \overline{v} dx$
3. $u \star v$ et $\mathcal{F}(u \star v) = \hat{u} \cdot \hat{v}$
4. $\widehat{u \cdot v} = (2\pi)^{-n} \hat{u} \star \hat{v}$
5. $\widehat{\partial_j u} = i \xi_j \hat{u}$
6. $\widehat{x_j u} = i \partial_j \hat{u}$

2.3.1 L'espace dual de S

Définition 2.4. $S'(\mathbb{R}^n) = S' \subset D'$ est le dual topologique de S , ie l'espace vectoriel des formes linéaires de S dans \mathbb{C} . Une application linéaire $T: S \rightarrow \mathbb{C}$ appartient à S' si et seulement si :

$$\exists k \in \mathbb{N}, \exists C > 0 : |\langle T, \varphi \rangle| \leq \sum_{|\alpha|+|\beta| \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)|, \quad \forall \varphi \in S. \quad (3)$$

Exemple 2.4. On a :

- S' s'injecte dans D' ,
- Si $T \in S'$, alors $\partial_{x_i} T \in S'$,
- Si de plus, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ est à croissance lente, alors $fT \in S'$,
- $L^p(\mathbb{R}^n) \subset S'$, pour $1 \leq p \leq \infty$,
- $x \mapsto e^x e^{ie^x} \in S'$ mais $x \mapsto e^{x^2} \notin S'$.

Définition 2.5 (et théorème). Si $T \in S'(\mathbb{R}^n)$, la transformée de Fourier de T , notée $\mathcal{F}T$ ou \hat{T} , est la forme linéaire sur S définie par

$$\langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n) \quad (4)$$

et $\mathcal{F}T \in S'(\mathbb{R}^n)$.

Corollaire 2. La transformation de Fourier est une application linéaire, bijective et bicontinue pour les suites de S' dans S' , et $\mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{(2\pi)^n} \overline{\mathcal{F}}$.

De plus, la définition de la transformée de Fourier sur S' coïncide avec celle sur S .

En particulier, la transformée de Fourier est une injection sur L^1 , et sur les mesures boréliennes finies.

Proposition 4. La transformée de Fourier sur S' vérifie les propriétés suivantes, pour $T \in S'$:

- $\mathcal{F}\partial_{x_j} T = i\xi_j \mathcal{F}T$, et
- $\mathcal{F}x_j T = i\partial_{\xi_j} \mathcal{F}T$.

Application

Théorème 2.7 (de Lévy). Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles et X une variable aléatoire réelle. $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X$ si et seulement si pour tous $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_{X_n}(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \varphi_X(t)$.

2.4 Espace de fonctions holomorphes

Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} .

Proposition 5. Soit (f_n) une suite de fonction holomorphe qui converge uniformément sur tous compacts de Ω vers une fonction f . Alors f est holomorphe et (f'_n) converge uniformément sur tous compacts vers f' .

Prenons (K_n) une suite exhaustive de compacts de Ω . Posons

$$p_n : f \in H(\Omega) \mapsto \sup_{z \in K_n} |f(z)|.$$

Cette famille de semi-normes (en fait norme dès que K_n a un point d'accumulation) définit la topologie de convergence uniforme. La métrique associée est encore $d = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{p_n}{1+p_n}$.

Théorème 2.8. L'application d définit une métrique complète sur $H(\Omega)$, invariante par translation. Si (f_n) est une suite de fonctions holomorphes sur Ω et si $f \in H(\Omega)$ alors

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f \iff d(f_n, f) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Définition 2.6 (famille normale). Une famille $A \subset H(\Omega)$ est dite normale si les éléments de A sont uniformément bornés sur tous compacts de Ω .

Exemple 2.5. Les fonctions entières de $H(\Omega)$ bornées par 1 forment une famille normale.

Théorème 2.9 (de Montel). Soit $A \subset H(\Omega)$. A est normale si et seulement si A est relativement compact dans $H(\Omega)$.

3 Espace de fonctions intégrables

Dans cette partie, X désignera un espace mesuré muni d'une tribu \mathcal{A} et d'une mesure μ . On pose la relation d'équivalence \sim définie pour deux fonctions f, g mesurable sur X par

$$f \sim g \iff f - g = 0 \text{ presque partout.}$$

3.1 Les espaces $L^p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$

Définition 3.1. Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré. Pour $p \geq 1$, on définit

$$\mathcal{L}^p(\mu) = \left\{ f : X \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurable, telle que } \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\} \text{ et } L^p(\mu) = \mathcal{L}^p(\mu) / \sim .$$

On pose pour $f \in L^p(\mu)$, $\|f\|_p := \left(\int_X |\tilde{f}|^p d\mu \right)^{1/p}$ pour $\tilde{f} \in f$.

- On remarquera que cette définition est bien posée.
- On définit par ailleurs $L^p_{\text{loc}}(\mu, \mathbb{R}^n)$ (μ est la mesure de Lebesgue), comme l'ensemble des classes de fonctions (modulo presque partout) intégrables sur tous compacts.

Théorème 3.1 (Théorème de Riesz-Fischer). $L^p(\mu)$ est un espace de Banach pour $p \geq 1$ avec la norme $\|\cdot\|_p$ avec $f \in L^p(\mu)$.

Application

Lemme 3.2. Soient $h_1, \dots, h_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ des fonctions linéairement indépendantes. Alors, $\exists (x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r$, tel que $A := (h_i(x_j)) \in \mathbf{GL}_r(\mathbb{C})$.

Démonstration. On considère $E = \text{vect}_{\mathbb{C}}(h_1, \dots, h_r)$, $F = \{\text{ev}_x \mid x \in \mathbb{R}\} \subset E^*$.

On a $F^\perp = \{h \in E \mid \forall x \in \mathbb{R}, h(x) = 0\} = \{0\}$ et $\dim F \leq \dim E^* = \dim E = r < \infty$, donc F est fermé dense, donc $F = E^*$, et on en extrait une base $(\text{ev}_{x_i})_{1 \leq i \leq r}$ de E^* .

Notons $A = (h_i(x_j))_{i,j}$, et soit $\lambda \in \mathbb{C}^r$ tel que $\lambda A = 0$, ie. $(\lambda A)_i = \sum_k \lambda_k A_{k,i} = \text{ev}_{x_i}(\sum_k \lambda_k h_k) = 0, \forall i$. Ainsi, $\sum_k \lambda_k h_k \in (E^*)^\perp = \{0\}$, et A est injective, donc bijective. \square

Théorème 3.3. Soit $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On définit $\tau_a f : x \mapsto f(x+a)$ les translatées de f et on considère l'espace vectoriel $E = \text{vect}_{\mathbb{C}}(\tau_a f \mid a \in \mathbb{R})$.

Alors E de dimension finie ssi $f \in C^\infty$ est solution d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants.

Dans ce cas, l'ordre minimal d'une telle EDL est $\dim(E)$ et E est l'espace de ses solutions.

Démonstration. (\implies) **Régularité des éléments de E**

Supposons $\dim E = r < \infty$. Considérons donc une base (f_1, \dots, f_r) de E . On définit alors $g_i : x \mapsto \int_0^x f_i(t) dt$. Comme $f_i \in L^1_{\text{loc}}$, on a $g_i \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Remarquons que les g_i sont linéairement indépendants, en effet, si $\sum \lambda_i g_i = 0$ alors, en différenciant, $\sum \lambda_i f_i = 0$.

On en déduit que l'espace $G = \text{vect}((g_i)_i, 1) \subset C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ des primitives des fonctions de E est de dimension $s = r + 1 < \infty$ et est stable par translation (car $\tau_a g_i = \int_0^a f_i + \int_0^x \tau_a f_i$). Ainsi,

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1, \dots, r\}, \exists (\lambda_i^j(a))_j \in \mathbb{C}^s, \text{ tq } \tau_a g_i = \sum_j \lambda_i^j(a) g_j$$

Si on note maintenant $G_i(x) := \int_0^x g_i(t) dt$ alors en intégrant de 0 à x , on en déduit (à a fixé) que $G_i(x+a) - G_i(a) = \sum_j \lambda_i^j(a) G_j(x)$. Soit $A \in GL_s(\mathbb{C})$ donnée par le lemme associé aux (G_i) . On définit les matrices

— $B(a) = (G_i(a+x_j) - G_i(a)) \in C^1(\mathbb{R}, M_s(\mathbb{C}))$ et

— $\Lambda(a) = (\lambda_i^j(a))_{i,j}$

On remarque $B = \Lambda A$, donc $\Lambda = B A^{-1}$ est également C^1 , d'où $g_i \in C^1$, puis $B \in C^2$ (car les G_i sont C^2), etc. On en déduit par une récurrence immédiate que les g_i sont lisses, et que les f_i admettent des représentants lisses, et $\Lambda \in C^\infty(\mathbb{R}, M_n(\mathbb{C}))$. **Ainsi,** $E \subset C^\infty$.

Stabilité de E par dérivation

Si on suppose maintenant que $E \subset C^1$ (ou, comme on l'a montré, quitte à identifier leurs composantes lisses), montrons que E est stable par dérivation (on a montré que dans ces conditions, $E \subset C^\infty$). Il suffit de le montrer sur G , en effet, $h \in G$ ssi $h' \in E$. Or, $g_i(x+a) = \sum_j \lambda_i^j(a) g_j(x)$ donc en dérivant par rapport à a , on obtient $g'_i(x+a) = \sum_j (\lambda_i^j)'(a) g_j(x)$, donc en particulier, $g'_i = \sum_j (\lambda_i^j)'(0) g_j \in G$.

Il en découle que $\{f^{(k)} \mid k \in \mathbb{N}\} \subset E$, donc

$$d = \min \left\{ k \in \mathbb{N} \mid (f^{(0)}, \dots, f^{(k)}) \text{ liée} \right\} \leq r$$

Comme d est minimal, on en déduit que f n'est solution d'aucune EDL d'ordre strictement inférieur, et $\exists a \in \mathbb{C}^d$ tq $f^{(d)} = \sum_{0 \leq k \leq d-1} a_k f^{(k)}$.

(\impliedby) **Réciproquement**, si f est lisse et solution de $y^{(d)} = \sum_{0 \leq k \leq d-1} a_k y^{(k)}$, alors ses translatées aussi, et donc E est inclus dans l'espace des solutions des cette EDL, de dimension de solution d . On en déduit en particulier que $r \leq d$, d'où l'égalité énoncée. \square

Parties Denses

\mathbb{R}^n sera systématiquement équipé de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue.

Proposition 6. *Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace des fonctions étagées intégrables est dense dans $\mathcal{L}^p(\mu)$.*

Théorème 3.4. *L'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans les espaces $\mathcal{L}^p(\mu, \mathbb{R}^n)$, pour $1 \leq p < \infty$.*

3.2 L'espace $L^\infty(\mu)$

Définition 3.2. On appelle $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ l'espace formé des fonctions f mesurables qui vérifient

$$\exists M, \{x \in X, f(x) \leq M\} \text{ est de mesure pleine.}$$

On définit $L^\infty(\mu) = \mathcal{L}^\infty(\mu) / \sim$. On note $\|f\|_\infty = \inf\{M \geq 0, \{x \in X, f(x) \leq M\} \text{ est de mesure pleine.}\}$.

Théorème 3.5. *L'espace $L^\infty(\mu)$ est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.*

\mathbb{R}^n sera systématiquement équipé de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue.

Proposition 7. *L'espace des fonctions étagées intégrables est dense dans $L^\infty(\mu)$.*

Attention, les fonctions continues ne sont pas denses dans $(L^\infty(\mu), \|\cdot\|_\infty)$, en effet, une limite uniforme de fonctions continues est continue.

Proposition 8. *L'espace normé $(L^p_\mu(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_p)$ est séparable pour $1 \leq p < \infty$.*

Proposition 9. *$L^\infty(\mathbb{R}^d)$ n'est pas séparable.*

Lemme 3.6. *Soit A une partie bornée de \mathbb{R}^d , de mesure de Lebesgue non nulle. Soient $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}^d$ tels que $\alpha \neq \alpha'$. Alors*

$$B(\mathbf{1}_{\alpha+A}, 1/4) \cap B(\mathbf{1}_{\alpha'+A}, 1/4) = \emptyset.$$

Si par l'absurde $D = f_n, ; n \in \mathbb{N}$ était dense dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ alors pour $\alpha \in \mathbb{R}^d$ il existe un plus petit entier $n(\alpha) \in \mathbb{N}$ tel que $f_{n(\alpha)} \in B(\mathbf{1}_{\alpha+A}, 1/4)$ ceci définissant une application $\alpha \mapsto n(\alpha)$. Elle ne saurait être injective car \mathbb{R}^d est indénombrable donc il existe $\alpha \neq \alpha'$ tel que

$$f_{n(\alpha)} \in B(\mathbf{1}_{\alpha+A}, 1/4) \cap B(\mathbf{1}_{\alpha'+A}, 1/4) = \emptyset$$

ce qui est absurde.

Démonstration du lemme. Supposons l'intersection non vide. Si $\varphi \in B(\mathbf{1}_{\alpha+A}, 1/4) \cap B(\mathbf{1}_{\alpha'+A}, 1/4)$ alors par inégalité triangulaire,

$$\|\mathbf{1}_{\alpha+A} - \mathbf{1}_{\alpha'+A}\|_\infty < 1/2.$$

Or le terme de gauche ne prend que les valeurs 0 ou 1 donc $\mathbf{1}_{\alpha+A} = \mathbf{1}_{\alpha'+A}$ presque partout. D'autre part par invariance de la mesure de Lebesgue par translation, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\|\mathbf{1}_{n(\alpha-\alpha')+A} - \mathbf{1}_{(n-1)(\alpha-\alpha')+A}\|_\infty = 0$ et par inégalité triangulaire,

$$\|\mathbf{1}_{n(\alpha-\alpha')+A} - \mathbf{1}_A\|_\infty \leq \sum_{k=1}^n \|\mathbf{1}_{k(\alpha-\alpha')+A} - \mathbf{1}_{(k-1)(\alpha-\alpha')+A}\|_\infty \leq 0.$$

Mais A étant bornée, il existe un entier n tel que $A \cap n(\alpha - \alpha') + A = \emptyset$ et dans ce cas $\|\mathbf{1}_{n(\alpha-\alpha')+A} - \mathbf{1}_A\|_\infty = 0$ si et seulement si A est de mesure de Lebesgue nulle ce qui est absurde. \square

3.3 L'espace $L^2(\mu)$

Proposition 10. *L'espace $L^2(\mu)$ munit de la norme $\|\cdot\|_2$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire*

$$\langle f; g \rangle = \int_X fg d\mu.$$

Proposition 11 (Théorème de représentation de Riesz). *Soit $\Phi : L^2(\mu) \rightarrow \mathbb{R}$ linéaire continue. Il existe $g \in L^2(\mu)$ telle que*

$$\Phi(f) = \int_X fg d\mu.$$

Application

Théorème 3.7. Soit μ une mesure positive sur \mathbb{R} admettant des moments à tout ordre, c'est à dire telle que

$$\int |t|^n d\mu(t) < \infty, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Alors $\mathbb{C}[X] \subset L^2(\mathbb{R}, \mu)$ et il existe une suite de polynômes (P_n) avec $\deg P_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et telle que pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, $\langle P_n, P_m \rangle = \delta_{n,m}$. S'il existe $\delta > 0$ vérifiant

$$\int e^{\delta|t|} d\mu(t) < \infty$$

alors la suite (P_n) est totale.

Démonstration. La première partie du théorème est évidente, μ admettant des moments à tout ordre, $L^1(\mathbb{R}, \mu) \supset \mathbb{C}[X]$ et comme les carrés de $\mathbb{C}[X]$ sont encore dans $\mathbb{C}[X]$ on a en fait $L^2(\mathbb{R}, \mu) \supset \mathbb{C}[X]$. Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt appliqué à la base canonique fournit une suite (Q_n) de polynômes unitaires vérifiant $\deg Q_n = n$ pour tout $n \geq 0$ et telle que la suite (Q_n) soit faite de polynômes deux à deux orthogonaux. Il suffit de renormaliser les Q_n pour obtenir une suite (P_n) .

Soit $f \in L^2(\mathbb{R}, \mu)$ orthogonale à tous les polynômes. On va montrer alors que $f \equiv 0$ μ -pp. Posons

$$F(z) = \int e^{-tz} f(t) d\mu(t),$$

avec $z \in \Omega$ et $\Omega \subset \mathbb{C}$ est à déterminer. Sachant que $|e^{tz} f(t)| \leq e^{|\operatorname{Re}(z)t|} |f(t)|$, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\int |e^{-tz} f(t)| d\mu(t) \leq \left(\int e^{2|\operatorname{Re}(z)t|} d\mu(t) \right)^{1/2} \|f\|_2.$$

On pose donc $\Omega = \{z \in \mathbb{C}, |\operatorname{Re}(z)| < \delta/2\}$. Le théorème d'holomorphicité sous le signe intégrale s'applique bien et $F \in H(\Omega)$. On peut donc dériver sous le signe somme et pour tout $z \in \Omega$ et $n \geq 0$,

$$F^{(n)}(z) = \int (-1)^n t^n e^{-tz} f(t) d\mu(t)$$

et comme $0 \in \Omega$, par orthogonalité de f contre $\mathbb{R}[X]$, $F^{(n)}(0) = 0$ ce qui implique par analyticité de F que $F = 0$ sur Ω . En particulier,

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(ix) = \int e^{-itx} f(t) d\mu(t) = 0.$$

Ce qui signifie que la mesure de densité f par rapport μ est de transformée de Fourier nulle. Le théorème d'injectivité des transformées de Fourier de mesure finie assure alors que $f = 0$ μ -pp. \square

Théorème 3.8. Soient μ et ν deux mesures de probabilité sur \mathbb{R} admettant des moments égaux à tout ordre et telles que

$$\int e^{\delta|t|} d\mu(t) < \infty.$$

Alors $\mu = \nu$.

Démonstration. Commençons par établir que

$$I := \int e^{\delta|t|} d\nu(t) < \infty.$$

Comme $e^{\delta|t|} \leq e^{\delta t} + e^{-\delta t} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta^{2n}}{(2n)!} t^{2n} \leq 2e^{\delta|t|}$,

$$I \leq 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta^{2n}}{(2n)!} \int t^{2n} d\nu(t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta^{2n}}{(2n)!} \int t^{2n} d\mu(t) \leq 2 \int e^{\delta|t|} d\mu(t)$$

par application du théorème de convergence monotone appliqué deux fois. On a utilisé ici également que tous les moments étaient égaux. On applique le théorème pr c dent à la mesure $\mu + \nu$: les polynômes sont denses dans $L^2(\mu + \nu)$. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $f_x : t \mapsto e^{itx}$. Il existe une suite de polynômes (P_j) qui converge dans $L^2(\mu + \nu)$ vers f_x , c'est à dire dans $L^2(\mu)$ et $L^2(\nu)$. Par égalité des moments, on a

$$\int P_j d\mu = \int P_j d\nu$$

et à la limite, $\widehat{\mu}(x) = \widehat{\nu}(x)$. Donc $\mu = \nu$ par injectivité de la transformée de Fourier à nouveau. \square

Exemple 3.1. Les polynômes de Hermite forment une famille totale, pour $\mu = e^{\frac{1}{2}x^2} \lambda$.