201 : Espaces de fonctions, exemples et applications

I - Espace des fonctions continues

A - Continuité et uniforme continuité

On considère X, Y métriques et $f : X \longrightarrow Y$.

① Définition : On dit que f est continue si $\forall x \in X, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in X, d(x,y) \leq \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$ et on note $C(X,Y)$ leur ensemble

② Exemple : Les fonctions constantes sont continues

③ Proposition : Si Y vectoriel alors $C(X,Y)$ vectoriel

④ Théorème : Soit $x \in X$, alors f continue en x si et seulement si $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}, x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \Rightarrow f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$

⑤ Application : Pour savoir si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Y^{\mathbb{N}}$ converge vers $y \in Y$, on peut l'écrire $y_n = f(x_n)$ avec $x_n \underset{n\to+\infty}{\overset{?}{\longrightarrow}} x$, f continue en x et $y = f(x)$

⑥ Définition : On dit que f est uniformément continue si $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x, y \in X, d(x,y) \leq \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$

⑦ Exemple : Les fonctions lipschitziennes sont uniformément continues

⑧ Proposition : Si f uniformément continue alors f continue mais la réciproque est fausse en général

⑨ Exemple : $x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2 \in \mathbb{R}$ continue non uniformément

B - Espace normé des fonctions continues sur un compact

⑩ Théorème de Heine : Si f continue, X compact alors f uniformément continue

⑪ Théorème : Si f continue, X compact alors $f(X)$ compact

⑫ Corollaire : Dans ce cas, si $Y = \mathbb{R}$ alors f bornée et atteint ses bornes

⑬ Application : En dimension finie les normes sont équivalentes

⑭ Application : Si X compact et $\forall x, y \in X, d(f(x), f(y)) < d(x,y)$ alors f admet un unique point fixe $a \in X$ et $\forall x_0 \in X$, $x_{n+1} = f(x_n)$, on a $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$

⑮ Corollaire : Si X compact alors $d_\infty(f,g) := \sup_{x\in X}(d(f(x), g(x)))$ est une distance sur $C(X,Y)$

⑯ Proposition : d_∞ caractérise la convergence uniforme, de plus si $f_n \in C(X,Y)$ et $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} f$ alors f continue

⑰ Remarque : La convergence simple ne suffit pas

⑱ Exemple : Si $f_n : x \in [0,1] \longmapsto x^n \in [0,1]$ alors $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{CVS}{\longrightarrow}} \delta_1$ mais $\delta_1 \notin C([0,1],[0,1])$

⑲ Théorème : Si Y complet, X compact alors $(C(X,Y), d_\infty)$ complet

C - Parties denses dans $C(X, \mathbb{K})$

On suppose X compact et A sous-algèbre de $C(X, \mathbb{K})$.

⑳ Définition : On dit que A sépare les points de X si $\forall x, y \in X, x \neq y \Rightarrow \exists f \in A, f(x) \neq f(y)$

㉑ Théorème de Stone-Weierstrass (cas réel) (admis) : Si A contient les constantes, sépare les points de X et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ alors A est dense dans $(C(X,\mathbb{R}), d_\infty)$

㉒ Remarque : A contient les constantes si et seulement si $1 \in A$.

㉓ Exemple : Soit K compact de $\mathbb{R}^d$, alors les fonctions polynomiales en d variables sont denses dans $C(K,\mathbb{R})$

㉔ Théorème de Weierstrass : Les fonctions polynomiales sur $[a,b] \subset \mathbb{R}$ sont denses dans $(C([a,b],\mathbb{R}), d_\infty)$ DEV 1

㉕ Application : Si $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 t^n f(t)\,dt = 0$ alors $f = 0$

㉖ Théorème de Stone-Weierstrass (cas complexe) : Si A contient les constantes, sépare les points de X, stable par conjugaison et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors A est dense dans $(C(X,\mathbb{C}), d_\infty)$

㉗ Exemple : Soit K compact de $\mathbb{C}$, alors les fonctions polynomiales en z et $\bar{z}$ sur K sont denses dans $C(K, \mathbb{C})$

II - Espaces de Lebesgue $L^p(\mu)$

A - Espace vectoriel $\mathcal{L}^p(\mu)$ et espace normé $L^p(\mu)$

On considère $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $p \in [1, +\infty[$

㉘ Définition : $\mathcal{L}^p(\mu)$ est l'ensemble des $f : X \to \mathbb{K}$ mesurables telles que $\|f\|_p := (\int_X |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} < +\infty$

㉙ Exemple : Si $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$ alors $l^p(\mathbb{N}) := \mathcal{L}^p(\mu) = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^p < +\infty\}$

㉚ Proposition : $\mathcal{L}^p(\mu)$ est un espace vectoriel

㉛ Proposition : Si $\mu(X) < +\infty$, $p \leq q$ alors $\mathcal{L}^q(\mu) \subset \mathcal{L}^p(\mu)$, de plus $l^p(\mathbb{N}) \subset l^q(\mathbb{N})$

㉜ Application : Si $p \leq q$ alors la convergence L^q de variables aléatoires implique la convergence L^p

㉝ Lemme (inégalité de Young) : Soit $\alpha \in]0,1[$, $u, v \in \mathbb{R}_+^*$ alors $u^\alpha v^{1-\alpha} \leq \alpha u + (1-\alpha)v$ avec égalité si et seulement si $u = v$

㉞ Théorème (inégalité de Hölder) : Soit $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $(f,g) \in \mathcal{L}^p(\mu) \times \mathcal{L}^q(\mu)$, alors $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$ avec égalité si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que $\alpha|f|^p = \beta|g|^q$ μ-presque partout

35 Corollaire (inégalité de Minkowski) : Soit $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$, alors $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

36 Remarque : $\|\cdot\|_p$ n'est pas une norme sur $\mathcal{L}^p(\mu)$

37 Définition : $L^p(\mu) := \mathcal{L}^p(\mu)/\sim$ avec $\sim$ relation d'équivalence sur $\mathcal{L}^p(\mu)$ définie par $f \sim g$ si $\|f-g\|_p = 0$

38 Proposition : $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé

39 Lemme : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^p(\mu)^{\mathbb{N}}$ tel que $\sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_p < +\infty$, alors $\sum f_n$ converge μ-presque partout et dans $L^p(\mu)$

40 **Théorème de Riesz-Fischer** : Si $p \in [1, +\infty]$ alors $L^p(\mu)$ complet

41 Corollaire : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^p(\mu)^{\mathbb{N}}$ et $f \in L^p(\mu)$ tels que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^p} f$ alors il existe $\varphi : \mathbb{N} \nearrow \mathbb{N}$ tel que $f_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ μ-presque partout — DEV 2

B - Densité avec les fonctions continues

42 Lemme : Soit f mesurable, alors il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étagées telles que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CVS} f$, si de plus $f \geq 0$ alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et positives, et si f bornée alors $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CVU} f$

43 Proposition : Les fonctions étagées intégrables est dense dans $L^p(\mu)$

44 Théorème : L'espace des fonctions continues à support compact $C_c(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\lambda)$

45 Application : Soit $f \in L^p(\lambda)$, $a \in \mathbb{R}$ et $\tau_a(f) := f(\cdot + a)$, alors $\|f - \tau_a f\|_p \xrightarrow[a\to 0]{} 0$

46 Théorème : Les fonctions étagées sont denses dans $L^\infty(\mu)$

47 Proposition : $L^p(\mu)$ est séparable mais pas $L^\infty(\mu)$

C - Densité avec les fonctions $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$

48 Définition : On dit que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^1(\lambda)^{\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité si $\int_{\mathbb{R}^d} \alpha_n \, d\lambda = 1$, $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} |\alpha_n| \, d\lambda < +\infty$ et $\int_{\|x\|>\varepsilon} |\alpha_n| \, d\lambda \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$

49 Exemple : Soit $\alpha \in L^1(\lambda)$ tel que $\int_{\mathbb{R}^d} \alpha \, d\lambda = 1$ et $\alpha_n := n^d \alpha(n\,\cdot)$, alors $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité

50 Théorème : soit $f \in L^p(\lambda)$, alors $f * \alpha_n \in L^p(\lambda)$ et $f * \alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^p} f$

51 Lemme : Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $f \in L^1_{loc}(\lambda)$, alors $f * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $\forall i \in [\![1, d]\!]$, $\frac{\partial}{\partial x_i}(f * \varphi) = f * \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$

52 Définition : On dit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite régularisante si $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité et $\alpha_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$

53 Exemple : Soit $\alpha(x) := \frac{\varphi(x)}{\int_{\mathbb{R}^d} \varphi \, d\lambda_d}$ avec $\varphi(x) = \exp\left(\frac{1}{1-\|x\|^2}\right) \mathbb{1}_{B(0,1)}(x)$ alors $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite régularisante

54 Théorème : $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\lambda)$

55 Théorème : Soit U ouvert de $\mathbb{R}^d$, K compact de U, alors il existe $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ tel que $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi_{|K} = 1$, $\varphi_{|U^c} = 0$

56 Application : Soit U ouvert de $\mathbb{R}$, alors $L^1_{loc}(U)$ s'injecte dans l'espace des distributions $\mathcal{D}'(U)$

III - Espace des fonctions holomorphes

A - Holomorphie et intégration

On considère Ω ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$.

57 Définition : On dit que f est holomorphe sur Ω si f est $\mathbb{C}$-dérivable sur Ω, on note $H(\Omega)$ leur ensemble

58 Exemple : Les fonctions polynomiales sont holomorphes, les séries entières également sur le disque ouvert de convergence

59 Théorème (Equations de Cauchy-Riemann) : f holomorphe si et seulement si $\frac{\partial Re(f)}{\partial x} = \frac{\partial Im(f)}{\partial y}$, $\frac{\partial Im(f)}{\partial x} = -\frac{\partial Re(f)}{\partial y}$

60 Définition : Soit $(\gamma, [a,b])$ un chemin dans Ω, si f continue alors $\int_\gamma f := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) \, dt$

61 Théorème : Soit γ chemin fermé dans Ω, si $f \in H(\Omega)$ alors $\int_\gamma f = 0$ (avec Ω convexe)

B - Propriétés de $H(\Omega)$

On suppose Ω convexe.

62 Théorème de Cauchy : Soit γ chemin fermé de Ω, $f \in H(\Omega)$ et $z \in \Omega \setminus Im(\gamma)$, alors $f(z) \, Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$

63 Corollaire : Si $f \in H(\Omega)$ alors f est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable et $\forall z \in \Omega$, $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{C(z,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$ avec $r > |z|$

64 Corollaire : Si $f \in H(\Omega)$ alors f analytique

65 Exemple : $\forall z \in \mathbb{C}$, $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$

(66) Théorème (principe du prolongement analytique) : Soit $f, g \in H(\Omega)$ coïncidant sur un ouvert non vide de Ω, alors $f = g$

(67) Application : $\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ est l'unique prolongement holomorphe de Γ sur $\mathbb{R}_+^* + i\mathbb{R}$

(68) Corollaire : $H(\Omega)$ est un anneau intègre contrairement à $C(\Omega)$

(69) Théorème (Principe des zéros isolés) : Si $f \in H(\Omega)$ non nul, soit $a \in \Omega$ tel que $f(a) = 0$, alors a possède un voisinage sur lequel f ne s'annule pas

C- Théorème d'Ascoli et métrique sur $H(\Omega)$

(70) Définition : Soit $A \subset C(X, Y)$, alors on dit que A est équicontinue si $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x, y \in X, \forall f \in A$, $d(x, y) \leq \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$

(71) Théorème d'Ascoli : Si X compact, soit $A \subset C(X, Y)$, alors A relativement compact si et seulement si A équicontinue et pour tout $x \in X$, $\{f(x), f \in A\}$ relativement compact dans Y

(72) Corollaire : Si X compact, Y vectoriel normé de dimension finie, soit $A \subset C(X, Y)$, alors A équicontinue bornée si et seulement si A relativement compact

(73) Définition : $K_n := \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq n, d(z, \Omega^c) \geq \frac{1}{n}\}$, et $p_n(f) := \|f\|_\infty^{K_n}$ pour $f \in H(\Omega)$, et $\delta(f, g) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} \frac{p_n(f-g)}{1 + p_n(f-g)}$ pour $f, g \in H(\Omega)$

(74) Remarque : $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$

(75) Théorème : $(H(\Omega), \delta)$ est un espace métrique complet

(76) Proposition : Soit $(f_p)_{p \in \mathbb{N}} \in H(\Omega)^{\mathbb{N}}$ et $f \in H(\Omega)$, alors : $f_p \xrightarrow[p \to +\infty]{CVUSTC} f$ si et seulement si $\delta(f_p, f) \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$

(77) Théorème de convergence de Weierstrass : Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H(\Omega)^{\mathbb{N}}$ tel que $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{CVUSTC} f$ alors $f \in H(\Omega)$ et $f_n' \xrightarrow[n \to +\infty]{CVUSTC} f'$

(78) Exemple : $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $]1, +\infty[+ i\mathbb{R}$

(79) Lemme : Si X complet, soit $A \subset X$, alors A relativement compact si et seulement si A précompact

(80) Définition : Soit $A \subset H(\Omega)$, alors on dit que A est localement bornée si pour tout compact K de Ω, il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall z \in K, \forall f \in A, |f(z)| \leq M$

(81) Lemme : Soit $A \subset H(\Omega)$ localement bornée, alors, pour tout compact K de Ω, il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall f \in A, \forall z_1, z_2 \in K, |f(z_1) - f(z_2)| \leq \lambda |z_1 - z_2|$

(82) Théorème de Montel : Soit $A \subset H(\Omega)$, alors A localement bornée si et seulement si A relativement compacte

DEV 3

(83) Exemple : Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}[X]^{\mathbb{N}}$ tel que $\sup(|P_n(z)|, n \in \mathbb{N}, |z| = 1) < +\infty$, alors $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille normale ie localement bornée, ainsi il n'existe pas de $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}[X]^{\mathbb{N}}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, P_n(0) = 1, \forall z \in \mathbb{C}^*, P_n(z) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et $\sup(|P_n(z)|, n \in \mathbb{N}, |z| = 1) < +\infty$

(84) Corollaire : La distance δ ne peut pas être issue d'une norme

(85) Remarque : En pratique on se sert de cette formulation : Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H(\Omega)^{\mathbb{N}}$ localement bornée telle que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admette $f \in H(\Omega)$ comme unique valeur d'adhérence (pour la convergence uniforme sur tout compact), alors $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{CVUSTC} f$