202 Exemples de parties denses et applications.

La notion topologique de densité est fréquemment utilisée en analyse principalement dans deux buts :
- prolonger une application sur un domaine plus grand
- étendre une propriété, vraie sur un certain espace fonctionnel, à un espace plus grand

I Notion de densité

Soit $(X,\mathcal{T})$ un espace topologique. Pour $x\in X$, on note $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x, et pour $A\subset X$, on note $\overline{A}$ l'adhérence de A dans X.

Définition 1
Une partie A de X est dite *dense* dans X si $\overline{A}=X$.

Proposition 2
A est dense dans X ssi pour tout V ouvert non vide de X, on a $A\cap V\neq\emptyset$.

Proposition 3 (Caractérisation dans les métriques)
Si (X,d) est un espace métrique, on a équivalence entre :
(i) A est dense dans X
(ii) tout élément $x\in X$ est limite d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in A^{\mathbb{N}}$.

Définition 4
X est dit *séparable* s'il contient une partie dénombrable dense.

Exemple 5
Tout espace métrique compact est séparable.

II Exemples dans des e.v. de dimension finie

Ⓐ Dans $\mathbb{R}$

Proposition 6
$\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$
↳ **Application 7** : Le seul automorphisme de corps de $(\mathbb{R},+,\times)$ est l'identité.

Proposition 8 (Sous-groupes de $(\mathbb{R},+)$)
Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$. Alors soit $G=a\mathbb{Z}$ avec $a\in\mathbb{R}$, soit G est dense dans $\mathbb{R}$.
↳ **Application 9** : (i) $\forall (a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$, $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ ssi $\frac{a}{b}\notin\mathbb{Q}$
(ii) $\langle e^{i\theta}\rangle$ est dense dans $\mathbb{U}$ ssi $\frac{\theta}{\pi}\notin\mathbb{Q}$

Proposition 10 (Fractions dyadiques)
$\left\{\frac{k}{2^n},\ k\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
↳ **Application 11** : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f\in\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$. Alors f est convexe ssi $\forall x,y\in I$,
$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq\frac{1}{2}\big(f(x)+f(y)\big)$$

Ⓑ Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, où $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Proposition 12
$GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
→ **Application 13** : $\forall A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, AB et BA ont même polynôme caractéristique (i.e. $\chi_{AB}=\chi_{BA}$).
→ **Application 14** (Théorème de Cayley-Hamilton) :
$\forall A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_A(A)=0$.

On notera respectivement $T_n(\mathbb{K})$, $D_n(\mathbb{K})$ et $C_n(\mathbb{K})$ les ensembles des matrices trigonalisables (sur $\mathbb{K}$), diagonalisables (sur $\mathbb{K}$) et à n valeurs propres distinctes (dans $\mathbb{K}$).

Proposition 15
(i) $\overline{D_n(\mathbb{C})}=\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
(ii) $\overline{D_n(\mathbb{R})}=T_n(\mathbb{R})$
(iii) $\overline{C_n(\mathbb{K})}=\overline{D_n(\mathbb{K})}$ (et $C_n(\mathbb{K})=\mathring{D}_n(\mathbb{K})$)

↳ **Application 16 (Piège !)** : Soit $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $M \longmapsto D(M)$

où $D(M)$ est la partie diagonalisable de la décomposition de Dunford de M. Alors, si $n \geq 2$, φ n'est pas continue.

III Exemples en dimension infinie

A) Prolongement de fonctions

Théorème 17
Soient (E,d) et (F,δ) deux espaces métriques, A dense dans E et (F,δ) complet. Soit $f : A \to F$ uniformément continue. Alors il existe un unique prolongement continu $\tilde{f}$ de f à E.

→ **Application 18** : Soient (E_1,d_1) et (E_2,d_2) métriques complets tels qu'il existe deux isométries $i_1 : E \to E_1$ et $i_2 : E \to E_2$ avec $i_1(E)$ et $i_2(E)$ denses dans E_1 et E_2. Alors $\exists!\, \varphi$ isométrie bijective de E_1 vers E_2 telle que $i_2 = \varphi \circ i_1$:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "i_2"'] & E_1 \arrow[d, "\exists!\varphi"] \\ & E_2 \arrow[ul, phantom, "\circlearrowleft"] \end{tikzcd}$$

en application de prop. 12

→ **Application 19** : L'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est différentiable et $\forall M,H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $D\det(M)\cdot H = \mathrm{Tr}({}^t\tilde{M} H)$.

Remarque 20 : C'est utile pour calculer le wronskien d'un système différentiel $Y'(t) = A(t)Y(t)$: si $w(t) = \det(y_1(t), \dots, y_n(t))$, alors on a $w(t) = w(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{Tr}(A(s))\,ds\right)$

↳ **Application 21** : (Théorème de Fourier-Plancherel)
$L^1 \cap L^2$ est dense dans L^2 et $\mathcal{F} : \begin{cases} L^1 \cap L^2 \longrightarrow L^2 \\ f \longmapsto \hat{f} \text{ (transformée de Fourier)} \end{cases}$
se prolonge en une unique isométrie $\tilde{\mathcal{F}} : L^2 \longrightarrow L^2$.

B) Approximations uniformes

Théorème 22 (Weierstraß)
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un compact et $f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$. Alors il existe $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ telle que $\|f - P_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Théorème 23 (Weierstraß trigonométrique)
$\mathrm{Vect}(\{t \mapsto e^{int}, n \in \mathbb{Z}\})$ est dense dans $(\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$.

Théorème 24 (Müntz) DEV
Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ strictement croissante avec $\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} \lambda_n > 1 \\ \lambda_0 = 0 \end{cases}$. On pose $\mathcal{P} := \mathrm{Vect}(\{x \mapsto x^{\lambda_n}, n \in \mathbb{N}\})$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) $\mathcal{P}$ est dense dans $(\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$
(ii) $\mathcal{P}$ est dense dans $(\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$
(iii) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\lambda_n}$ diverge

Proposition 25
L'ensemble des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ continues nulle part dérivables est dense dans $(\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

C) Approximations L^p

Définition 26
Soit $f \in L^1$ et $g \in L^p$, on appelle convolée de f et g la fonction définie par $(f*g)(x) = \int f(x-y)\, g(y)\, dy$.

Définition 27
On appelle approximation de l'unité toute suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de L^1 telle que :
$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ \varphi_n \geq 0 \text{ et } \int \varphi_n = 1 \\ \forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \int_{\{|x|>\varepsilon\}} \varphi_n(x)\,dx = 0 \end{cases}$$

Proposition 28
Soit $p\in[1,+\infty[$, $f\in L^p$ et $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une approximation de l'unité.
Alors on a : $\begin{cases} \forall n\in\mathbb{N},\ f*\varphi_n \in L^p \text{ et } \|f*\varphi_n\|_p \leq \|f\|_p \\ \lim\limits_{n\to+\infty} f*\varphi_n = f \text{ dans } L^p \end{cases}$

→ **Application 29** : ce n'est pas une application. $\forall p\in[1,+\infty[$, $\begin{cases} \text{~~(i) } \mathcal{C}_c \text{ est dense dans } L^p\text{~~} \\ \text{(ii) } \mathcal{C}_c^\infty \text{ est dense dans } L^p \end{cases}$

Théorème 30
$\forall p\in[1,+\infty]$, l'ensemble des fonctions étagées mesurables est dense dans L^p.

→ **Application 29bis** : (Lemme de Riemann-Lebesgue)
Soit $I\subset\mathbb{R}$ un intervalle et $f : I\to\mathbb{C}$ intégrable.
Alors $\int_I f(t)\, e^{-ist}\,dt \xrightarrow[s\to\pm\infty]{} 0$

→ **Application 29ter** : Soit $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ borné et $p\in[1,+\infty[$.
Alors $L^p(\Omega)$ est séparable.

Remarque 31 : L^∞ n'est pas séparable

IV Bases hilbertiennes

(A) Espaces de Hilbert

On considère dans cette partie $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert.

Définition 32
Une famille $(e_i)_{i\in I}\in H^I$ est une base hilbertienne si :
$\begin{cases} \text{(i) } \forall i,j\in I,\ \langle e_i,e_j\rangle = \delta_{ij} \\ \text{(ii) } \mathrm{Vect}(\{e_i,\ i\in I\}) \text{ est dense dans } H \end{cases}$

Proposition 33 : Un s.e.v. F est dense dans H ssi $F^\perp = \{0\}$.

→ **Corollaire 34** : Une famille orthonormée $(e_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne ssi $\forall h\in H$, $(\forall i\in I, \langle e_i,h\rangle = 0) \Rightarrow h=0$

Théorème 35 : Tout espace de Hilbert (resp. séparable) admet une base hilbertienne (resp. dénombrable).

→ **Exemple 36** : Dans $(L^2([0,\pi]),\langle\cdot,\cdot\rangle)$ où $\langle u,v\rangle = \int_0^\pi u v\,dx$,
$\left\{x\mapsto\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(nx),\ n\in\mathbb{N}^*\right\}$ et $\left\{x\mapsto\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(nx)\right\}\cup\left\{x\mapsto\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right\}$
sont des bases hilbertiennes. Ceci est la base de l'analyse de Fourier dans L^2.

(B) Polynômes orthogonaux

Définition 37 : On appelle fonction poids sur un intervalle $I\subset\mathbb{R}$ toute fonction $\rho : I\to\mathbb{R}$ mesurable >0 telle que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\int_I |x|^n\rho(x)\,dx<+\infty$.
On note $\langle f,g\rangle_\rho := \int_I f(x)\overline{g(x)}\rho(x)\,dx$ et on note $L^2(I,\rho)$ l'ensemble des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ.

Définition 38 : L'unique famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes orthogonaux unitaires tels que $\forall n\in\mathbb{N}$, $d^\circ P_n = n$ est la famille des polynômes orthogonaux associée à ρ.

→ **Exemple 39** : (i) (Polynômes de Hermite) $I=\mathbb{R}$, $\rho(x) = e^{-x^2}$,
$$P_n(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n e^{x^2}\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(e^{-x^2}\right)$$
(ii) (Polynômes de Legendre) $I=[-1,1]$, $\rho(x) = 1$,
$$P_n(x) = \frac{n!}{(2n)!}\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left((x^2-1)^n\right)$$

Théorème 40 DEV
S'il existe $\alpha>0$ tel que $\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)\,dx<+\infty$, alors la famille de polynômes orthogonaux(*) associée à ρ forme une base hilbertienne de $(L^2(I,\rho),\langle\cdot,\cdot\rangle_\rho)$. (*) : après renormalisation

→ **Exemple 41** : polynômes de Hermite, OK aussi si I est borné.

Références : Goudon, Brezis.