202 Exemples de parties denses et applications

Prérequis : notion d'espace topologique et d'espace métrique.

I Définitions et caractérisations [Gou] [Gos]

Soit E un espace topologique et soit X une partie de E.

1. Définition (adhérence) — L'adhérence de X, notée $\overline{X}$, est le plus petit fermé de E contenant X.

2. Remarque — L'adhérence de X est l'intersection de tous les fermés de E contenant X.

3. Définition (dense) — On dit que X est dense dans E si $\overline{X} = E$.

4. Définition (point adhérent) — Un point $x \in E$ est dit adhérent à X lorsque tout voisinage de x rencontre X.

5. Caractérisations de la densité — X est dense dans E ssi tout point de E est adhérent à X.
Si (E,d) est métrique : X est dense dans E ssi $d(y,X)=0$ pour tout $y \in E$ ssi tout élément de E est limite d'une suite d'éléments de X.

II Densité et nombre réels

On considère la distance associée à la valeur absolue.

6. Proposition — Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$. [TM, p.47 ou p.110]

7. Application — Les endomorphismes du groupe additif $\mathbb{R}$, continus (en 0) ou monotones sont $\mathbb{R}$-linéaires. [TM, p 113]

8. Corollaire — Le seul endomorphisme de corps de $\mathbb{R}$ est l'identité.

9. Proposition — Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $b \neq 0$. L'ensemble $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ ssi $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$. [Gou, E5 p. 199]

10. Applications — i) L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\cos(n))$ est exactement $[-1;1]$. [MCDT, p52]
ii) Un contre-exemple à la proposition (A, B fermés $\Rightarrow A+B$ fermé) : $A=\mathbb{Z}$ et $B = x\mathbb{Z}$ où $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. [Gou, E1 p51]

11. Proposition — L'ensemble des nombres dyadiques est dense dans $[0,1]$. [TM, p 263]

12. Application — Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Toute fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continue sur $]a,b[$ et semi-convexe (i.e. $\forall x,y \in [a,b]$, $f(\frac{1}{2}(x+y)) \leq \frac{1}{2}(f(x)+f(y))$), est convexe sur $[a,b]$. [TM p 263]

III Densité et matrices

On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On considère sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la distance définie par $d((a_{ij}),(b_{ij})) = \sum_{i,j} |a_{ij} - b_{ij}|$. On note : $T_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaires supérieures ; $D_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonales ; $C_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonales à valeurs propres distinctes.

13. Proposition — L'ensemble $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. [OA p 155] [Rom p. 39]

14. Applications — i) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les matrices

AB et BA ont même polynôme caractéristique. [OA, p 217] [Rom, p 38]

ii) Le calcul de la différentielle du déterminant sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $\forall X, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$D_X \det . H = \operatorname{tr}({}^t\operatorname{com}(X) H)$$ [Rou, p.74]

[Rom, p 51] [OA p 175]

15. <u>Proposition</u> — L'ensemble $C_n(\mathbb{K})$ est dense dans $T_n(\mathbb{K})$.

16. <u>Corollaire</u> — L'ensemble $D_n(\mathbb{K})$ est dense dans $T_n(\mathbb{K})$.

17. <u>Corollaire</u> — L'ensemble $D_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

18. <u>Remarque</u> — L'ensemble $D_n(\mathbb{R})$ n'est pas dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

19. <u>Applications</u> — i) Le théorème de Cayley-Hamilton : le polynôme caractéristique d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ en est un polynôme annulateur. [OA, p.217] [Rom, p 51]

ii) La formule $\det(e^M) = e^{\operatorname{tr}(M)}$ $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ [Rom, p51]

iii) Soit $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui a M associe la partie diagonalisable de sa décomposition de Dunford. Si $n \geq 2$, ϕ n'est pas continue. [OA, p.180]

<u>IV Densité et fonctions</u>

1) <u>Approximations uniformes</u>

20. <u>Théorème</u> (Weierstrass) — Toutes fonctions $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de fonctions polynômes. [Gov, p 225] [RuPr, p.147]

21. <u>Applications</u> — i) Le théorème de Müntz : Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs strictement et strictement croissante. L'ensemble $\operatorname{Vect}_{n\in\mathbb{N}}(x \mapsto x^{\alpha_n})$ est dense dans $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ — pour la norme $\| \|_2$ — ssi la série $\sum 1/\alpha_n$ diverge. [Gov, p 286] [RuAn, p 361]

ii) Un théorème des moments : Soit $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{C})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 f(t) t^n dt = 0.$$

Alors f est la fonction nulle. [Gov, p 281]

22. <u>Théorème</u> (Féjer) — Soit f une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, continue et 2π-périodique. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on note $e_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto e^{ikx}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les fonctions

$$S_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e_k \quad \text{et} \quad C_n = \frac{S_0 + \cdots + S_n}{n+1}$$

(où $c_k(f)$ sont les coefficients de Fourrier de f). Alors la suite de fonctions (C_n) converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$. [Gou, p 282]

23. <u>Corollaire</u> — Toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et 2π-périodique est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques.

24. <u>Application</u> — Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et 2π-périodique. On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(2\pi\alpha k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) dt.$$

[Gov, p 282]

2) Espaces L^p

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

25. Théorème — Soit S l'ensemble des fonctions simples g sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telles que

$$\mu(\{x \in \Omega \mid g(x) \neq 0\}) < +\infty .$$

Pour tout $p \in [1, +\infty[$, S est dense dans $\mathcal{L}^p(\mu)$; et donc les classes de ces fonctions sont denses dans $L^p(\mu)$. [GK, p.194] [RuAn, p.83]

26. Théorème — Les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact forment un ensemble dense dans $\mathcal{L}^p$. [GK, p 204]

27. Application (théorème de Riemann-Lebesgue) — Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x)\, dx \xrightarrow[|t| \to +\infty]{} 0 .$$

[GK, p 205] [RuAn, p.132]

V Densité et espaces complets

1) Prolongement de fonctions

28. Théorème — Soient E et F deux espaces métriques, avec F complet. Soit X une partie dense de E et $f : X \to F$ une application uniformément continue. Alors il existe une et une seule application g de E dans F, continue, de restriction à X égale à f. De plus g est uniformément continue.

[Gos, p.117] [Gou, p 24]

29. Applications — L'unicité à isométrie bijective près du complété d'un espace métrique. [Gou, p.25]

2) Théorème de Baire

30. Théorème (Baire) — Soit E un espace métrique complet, et $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts de E, chaque O_n étant dense dans E. Alors $O = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ est un ouvert dense de E. [Gos, p 118] [Gou, p 391]

Formulation équivalente : Soit E un espace métrique complet, et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fermés de E, chaque F_n étant d'intérieur vide. Alors $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est un fermé de E d'intérieur vide.

31. Application — Un espace vectoriel normé admettant une base dénombrable n'est pas complet. [Gou, p.393] [Gos, p 194]

Références

[Gou] Gourdon, Analyse.

[OA] Objectif agrégation.

[Rom] Rombaldi, Thèmes pour l'agrégation de Mathématiques.

[ZM] Zuily - Queffélec... Zissier - Mialet, Analyse à une variable réelle.

[RuAn] Rudin, Analyse réelle et complexe.

[RuPr] Rudin, Principes d'analyse mathématique.

[Rou] Rouvière, Calcul différentiel.

[Gos] Gostiaux, Tome 2 - Topologie, analyse réelle.

[GK] Garet - Kurtzmann, De l'intégration aux probabilités.

[MCDT] Moisan - Chanet - Delmas - Tosel, Analyse.

On aurait pu :

- Stone-Weierstrass (théorème) [RuPr, p 151]
- Runge (théorème) [RuAn, p. 317]
- Plancherel - Fourier (transformée) [RuAn, p. 225]
- autres applications du thm de Baire [Gou, p 391]

Théorème de Weierstrass

Enoncé :

Toute fonction continue $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est limite uniforme sur $[a,b]$ de fonctions polynômes.

Démonstration :

On va démontrer le théorème dans le cas où $a=0$ et $b=1$. Dans le cas général, il suffira de considérer $g(x) = f(a(1-x)+bx)$ pour $x \in [0;1]$.

Soit $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{C}$ continue.

Pour démontrer ce théorème, on va utiliser les polynômes de Bernstein :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad B_n(f) : \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) b_n^k(x) \end{array}$$

$$\text{où } b_n^k(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

On va démontrer que la suite $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0;1]$.

- Pour simplifier l'écriture on notera $1, x, x^2$ les fonctions $x \mapsto 1$, $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$

On va chercher à calculer $\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 b_n^k(x)$

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 b_n^k(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k^2}{n^2} - 2x\frac{k}{n} + x^2\right) b_n^k(x)$$

$$= B_n(x^2) - 2x B_n(x) + x^2 B_n(1)$$

On va calculer $B_n(1)$, $B_n(x)$, $B_n(x^2)$

En utilisant la propriété du binôme de Newton, on définit:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad N(a,b) = (a + (1-b))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

- $B_n(1) = \sum_{k=0}^{n} 1 \times b_n^k(x) = N(x,x) = 1$

- $B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} b_n^k(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1} x (1-x)^{n-k}$

$$= \frac{x}{n} \frac{\partial N}{\partial a}(x,x) = \frac{x}{n} n (x + (1-x))^{n-1}$$

$$= x$$

- $B_n(x^2) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2} b_n^k(x) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2 x^k (1-x)^{n-k}$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (k + k(k-1)) x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \frac{1}{n^2} \left[x \frac{\partial N}{\partial a}(x,x) + x^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) x^{k-2} (1-x)^{n-k} \right]$$

$$= \frac{1}{n^2} \left[n x + x^2 \frac{\partial^2 N}{\partial a^2}(x,x) \right]$$

$$= \frac{x}{n} + \frac{x^2}{n^2} n(n-1)$$

$$= \frac{x(1-x)}{n} + x^2$$

D'où $\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 b_n^k(x) = \frac{x(1-x)}{n} x^2 - 2x \times x + x^2 \times 1$

$$= \frac{x(1-x)}{n}$$

- Majoration de $\sum_{k, |\frac{k}{n} - x| \geq \eta} b_n^k(x)$ où $\eta > 0$

Soit $\eta > 0$

$$\sum_{k, |\frac{k}{n} - x| \geq \eta} b_n^k(x) \leq \frac{1}{\eta^2} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 b_n^k(x) = \frac{1}{\eta^2} \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{1}{n\eta^2}$$

- Soit $\varepsilon > 0$. Montrons qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tq

$$\forall n \geq N, \forall x \in [0,1] \quad |B_n(f)(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon$$

Comme f est continue sur $[0;1]$ compact, f est bornée et uniformément continue d'après le théorème de Heine.

Donc $\exists M > 0, \forall x \in [0;1] \quad |f(x)| \leq M$

et $\exists \eta > 0, \forall (x,y) \in [0;1]^2 \ (|x-y| < \eta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| < \varepsilon)$

Ainsi, $\forall x \in [0;1], \forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
|B_n(f)(x) - f(x)| &= |B_n(f)(x) - f(x) B_n(1)| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| b_n^k(x) \\
&\leq \varepsilon \left(\sum_{k, \left|\frac{k}{n} - x\right| < \eta} b_n^k(x) \right) + 2M \left(\sum_{k, \left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \eta} b_n^k(x) \right) \\
&\leq \varepsilon \left(\sum_{k=0}^{n} b_n^k(x) \right) + \frac{2M}{\eta^2 n} \\
&\leq \varepsilon + \frac{2M}{n\eta^2}
\end{aligned}$$

En prenant $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{2M}{N\eta^2} \leq \varepsilon$ on a bien :

$$\forall n \geq N, \forall x \in [0;1] \quad |B_n(f)(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon$$

Donc la suite $(B_n(f))_n$ converge uniformément vers f sur $[0;1]$.

Gourdon p 225

Un théorème de prolongement

Théorème : Soient (E, d) et (F, d') deux espaces métriques, avec (F, d') complet. Soit X une partie de E dense dans E et $f : X \to F$ une application uniformément continue.
Alors il existe une unique application $g : E \to F$ uniformément continue telle que $g_{|X} = f$.

Preuve :

Soit $y \in E$

Comme X est dense dans E, c'est à dire $\overline{X} = E$, on a $y \in \overline{X}$
Donc il existe des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X qui convergent vers y.
Comme on cherche une fonction g continue on devra avoir $g(y) = \lim_{n\to+\infty} g(x_n)$ et comme on souhaite que $g_{|X} = f$, il faut que pour tout n, $f(x_n) = g(x_n)$.

- On va donc justifier la convergence des suites $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$
  La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans E, donc est une suite de Cauchy. f étant uniformément continue de X dans F on en déduit que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.
  De plus F étant complet la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
- Montrons que la limite de $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne dépend pas du choix de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X qui converge vers y.
  Soit $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une autre suite d'éléments de X qui converge vers y.
  Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $x''_{2n} = x_n$ et $x''_{2n+1} = x'_n$
  $(x''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers y.

donc $\ell'' = \lim_{k \to +\infty} f(x''_k)$ existe

En extrayant les suites de rang pair et impair

on obtient $\ell'' = \lim_{n \to \infty} f(x''_{2n}) = \lim_{n \to \infty} f(x_n)$

$$\text{et } \ell'' = \lim_{n \to \infty} f(x''_{2n+1}) = \lim_{n \to \infty} f(x'_n)$$

donc $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(f(x'_n))_{n \in \mathbb{N}}$ on même limite

- On définit $g : \begin{array}{l} E \to F \\ y \mapsto g(y) \end{array}$

où $g(y)$ est la limite commune des suites $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de X qui converge vers y.

Montrons que g est uniformement continue sur E

On sait que $f : X \to F$ est uniformément continue

Soit $\varepsilon > 0$.

$\exists \alpha > 0, \forall (x, x') \in X^2, \ d(x, x') \leqslant \alpha \Rightarrow d'(f(x), f(x')) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$

Soient alors y et y' dans E vérifiant $d(y, y') \leqslant \frac{\alpha}{3}$

Il existe deux suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X qui convergent respectivement vers y et y'.

donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0 \quad d(x_n, y) \leqslant \frac{\alpha}{3}$

$\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_1 \quad d(x'_n, y') \leqslant \frac{\alpha}{3}$

Les suites $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(f(x'_n))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers $g(y)$ et $g(y')$

donc $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_2 \quad d'(f(x_n), g(y)) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$

$\exists n_3 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_3 \quad d'(f(x'_n), g(y')) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$

Posons $N = \max\{n_0, n_1, n_2, n_3\}$

$\forall n \geq N$ on a :

$$d(x_n, x_n') \leq d(x_n, y) + d(y, y') + d(y', x_n') \leq 3 . \frac{\alpha}{3} = \alpha$$

donc $\quad d'(f(x_n), f(x_n')) \leq \frac{\varepsilon}{3}$

d'où $\quad d'(g(y), g(y')) \leq d'(g(y), f(x_n)) + d'(f(x_n), f(x_n')) + d'(f(x_n'), g(y'))$

$$\leq 3 . \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Ainsi,

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall (y, y') \in E^2$

$$d(y, y') \leq \frac{\alpha}{3} \Rightarrow d'(g(y), g(y')) \leq \varepsilon$$

Donc la fonction g est uniformément continue sur E

Gourdon p 24

Application :

Le complété d'un espace métrique est unique à isométrie bijective près.

Preuve : Soit (E,d) un espace métrique

Rappel : On appelle complété de E tout espace métrique F complet, tel qu'il existe une injection $i : E \to F$ vérifiant :

1) $\forall (x,y) \in E^2$, $d(x,y) = d_F(i(x), i(y))$
2) l'adhérence, dans F, de $i(E)$ est égale à F.

Soient (E_1, d_1), (E_2, d_2) deux espaces métriques complets tels qu'il existe une isométrie i_1 (resp i_2) de E dans E_1 (resp E_2), avec $i_1(E)$ (resp $i_2(E)$) dense dans E_1 (resp E_2).

Montrons qu'il existe une unique isométrie φ de E_1 dans E_2, bijective, et vérifiant $\varphi_{i_1}(x) = i_2(x)$ pour tout $x \in E$.

Définissons φ sur $i_1(E)$ en posant $\varphi(i_1(x)) = i_2(x)$ pour tout $x \in E$. L'application φ restreinte à $i_1(E)$ est isométrique car

$$\begin{aligned} \forall (x,y) \in E^2, \quad d_2(\varphi(i_1(x)), \varphi(i_1(y))) &= d_2(i_2(x), i_2(y)) \\ &= d(x,y) \\ &= d_1(i_1(x), i_2(x)) \end{aligned}$$

Ainsi φ est uniformément continue sur $i_1(E)$.
Comme $i_1(E)$ est dense dans E_1 et que E_2 est complet il existe d'après le théorème précédent un prolongement de φ sur E_1, encore noté φ, qui est uniformément continue sur E_1. De plus, φ est isométrique sur $i_1(E)$, et comme $i_1(E)$ est dense E_1 et que φ est continue, φ est isométrique sur E_1 tout entier.
En particulier, φ est injective.
Montrons que φ est surjective.
Soit $\beta \in E_2$. Comme $i_2(E)$ est dense dans E_2, il existe une suite $(\beta_n) = (i_2(x_n))$ de $i_2(E)$ qui converge vers β. De plus pour tous $p, q \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} d_1(i_1(x_p), i_1(x_q)) = d(x_p, x_q) &= d_2(i_2(x_p), i_2(x_q)) \\ &= d_2(\beta_p, \beta_q) \end{aligned}$$

La suite $(i_1(x_n))$ est de Cauchy dans E_1.
Comme E_1 est complet, cette suite converge.
Soit α sa limite. Comme φ est continue,

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha) = \lim_{n \to \infty} \varphi(i_1(x_n)) &= \lim_{n \to \infty} i_2(x_n) \\ &= \lim_{n \to \infty} \beta_n \\ &= \beta \end{aligned}$$

D'où la surjectivité.
L'application φ est unique d'après l'unicité du prolongement (d'après le théorème précédent)

Gourdon p 26