202

Exemples de parties denses et applications

I. Définition et caractérisation

Soit E un espace topologique.

[GOU:10]

Déf 1: Une partie A de E est dite dense dans E si $\bar{A} = E$.

Prop 2: A est dense dans E ssi pour tout ouvert V non vide de E, on a $A \cap V \neq \emptyset$.

Prop 3: (caractérisation) Si (E, d) est un espace métrique, on a équivalence entre :
(i) A est dense dans E
(ii) tout élément $x \in E$ est limite d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$.

II. Densité et nombres réels

On se place dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle.

[GOU:10]

Prop 4: Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

[GOU:197]

Prop 5: Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ tel que $G \neq \{0\}$. Alors soit $G = m\mathbb{Z}$ avec $m>0$, soit G est dense dans $\mathbb{R}$.

App 6: Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}^*)^2$. L'ensemble $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ ssi $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$.

App 7: Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. L'ensemble $a\mathbb{N} - b\mathbb{N}$ est dense dans $\mathbb{R}$ ssi $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$.

App 8: L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\sin n)_n$ est $[-1;1]$.

[GOU:51]

App 9: Un contre-exemple à la proposition "A, B fermés $\Longrightarrow$ $A+B$ fermé" est : $A = \mathbb{Z}$ et $B = x\mathbb{Z}$ (où $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$).

III. Densité et matrices

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On note : • $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ trigonalisables
• $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisables
• $\mathcal{D}_n'(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ayant n valeurs propres distinctes.

[ROM:39]

Th 10: L'ensemble $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

App 11: Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors AB et BA ont même polynôme caractéristique.

[ROM:51] et [OA:179]

Prop 12: (i) $\mathcal{D}_n'(\mathbb{K})$ et $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ sont denses dans $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$
(ii) $\mathcal{D}_n'(\mathbb{C})$ et $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ sont denses dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
(iii) $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ n'est pas dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

[ROM:51-52]

App 13: Le théorème de Cayley-Hamilton.

App 14: Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a : $\det(e^M) = e^{\mathrm{Tr}(M)}$

App 15: Pour $n \geq 2$, l'application qui associe à une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ son polynôme minimal n'est pas continue.

[OA:180]

App 16: Soit φ l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans lui-même qui à M associe D la partie diagonalisable de sa décomposition de Dunford.
Alors, si $n \geq 2$, l'application φ n'est pas continue.

IV. Densité et fonctions

1) Approximation uniforme

[GOU:224]

Th 17: (Weierstrass) Toute fonction continue $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est limite uniforme sur $[a;b]$ d'une suite de fonctions polynômes.

[GOU: 286] App 18 : Soit $f : [0;1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 f(t) t^n \, dt = 0$.
Alors f est la fonction nulle.

[GOU: 286] Th 19 : (Fejér) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et 2π-périodique. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on note $e_k : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto e^{ikx} \end{array}$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit les fonctions :
$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e_k \quad , \quad C_n(f) = \frac{S_0 + S_1 + \cdots + S_n}{n+1}$$
où les c_k sont les coefficients de Fourier de f.
Alors la suite de fonctions $(C_n(f))_n$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

App 20 : Toute fonction continue 2π-périodique est limite uniforme de polynômes trigonométriques sur $\mathbb{R}$.

App 21 : Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Alors pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et 2π-périodique on a :
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(2\pi\alpha k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \, dt.$$

[GOU; 288]

App 22 : Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Alors $\Gamma = \{ n\alpha - \lfloor n\alpha \rfloor, n \in \mathbb{N} \}$ est dense dans $[0;1]$. ($\lfloor . \rfloor$ est la partie entière).

Rq 23 : On retrouve que $\alpha\mathbb{N} - \mathbb{N}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

On considère un espace métrique compact non vide (X,d) et on s'intéresse à l'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) des fonctions continues de X dans $\mathbb{K}$, noté $\mathcal{C}^{\mathbb{K}}(X)$.

[HL: 28] Déf 24 : Une partie H de $\mathcal{C}^{\mathbb{K}}(X)$ est dite séparante si pour tout couple (x,y) de points distincts de X, il existe un $h \in H$ pour lequel $h(x) \neq h(y)$.

[HL: 29] Th 25 : (Stone-Weierstrass, cas réel). Toute sous-algèbre de $\mathcal{C}^{\mathbb{R}}(X)$ séparante et contenant les fonctions constantes est dense dans $\mathcal{C}^{\mathbb{R}}(X)$.

Ex 26 : • L'ensemble des fonctions lipschitziennes de X dans $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathcal{C}^{\mathbb{R}}(X)$. [H-L: 29]
• Soient X un compact de $\mathbb{R}^d$ et H l'ensemble des fonctions polynômiales (à d variables) de X dans $\mathbb{R}$: $H = \{ x \mapsto P(x)$, avec $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_d] \}$. Alors H est dense dans $\mathcal{C}^{\mathbb{R}}(X)$.
Dans le cas particulier où $d=1$ et où X est un intervalle compact $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, on retrouve le théorème de Weierstrass.

Prop 27 : Pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}_c^k(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. [ZQ: 323]

Prop 28 : Pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathcal{C}_c^k(\mathbb{R}^n)$ et donc dans $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$. [ZQ: 324]

2) Espaces L^p

Prop 29 : Pour $1 \leq p < +\infty$, $L_c^p(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$. [ZQ: 323]

Prop 30 : Pour $1 \leq p < +\infty$, $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$. [ZQ: 324]

App 31 : Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}$ est une fonction continue qui tend vers 0 à l'infini. (où $\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(x) \, dx$, $t \in \mathbb{R}$) [ZQ: 327]

Déf 32 : On dit qu'un espace métrique E est séparable s'il existe un sous-ensemble $D \subset E$ dénombrable et dense. [BRE: 47]

Prop 33 : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. $L^p(\Omega)$ est séparable pour $1 \leq p < +\infty$. [BRE: 62]

3) Polynômes orthogonaux

Déf 34 : Soit $(H, \langle .,. \rangle)$ un espace de Hilbert. On dit qu'une famille $(e_i)_{i \in I}$ est une base hilbertienne de H si elle est orthogonale, normée et totale (ie $H = \overline{\mathrm{vect}(e_i, i \in I)}$). [OA: 107]

Th 35 : i) Tout espace de Hilbert admet une base hilbertienne [OA: 108]
ii) Tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne dénombrable.

Déf 36 : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle fonction poids une fonction $\rho : I \to \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive et telle que [OA: 110]

$\forall m \in \mathbb{N}$, $\int_I |x|^m \rho(x)dx < +\infty$.
On note $L^2(I,\rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ, muni du produit scalaire $\langle f,g\rangle_\rho = \int_I f(x)\overline{g(x)}\rho(x)dx$.

[OA:110] Prop 37: Il existe une unique famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires orthogonaux deux à deux tels que $\deg P_n = n$.
Cette famille s'appelle la famille des polynômes orthogonaux associés à la fonction poids ρ.

[OA:140] Th 38: (densité des polynômes orthogonaux). Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction poids.
S'il existe un réel $\alpha>0$ tel que $\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)dx < +\infty$, alors la famille des polynômes orthogonaux associée à ρ forme une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$. DEVLPT 1

V. Densité et espaces complets

1) Prolongement de fonctions

[GOU: 23-24] Th 39: Soient (E,d) et (F,d') deux espaces métriques et A une partie de E dense dans E.
On suppose que (F,d') est complet.
Soit $f: (A,d) \to (F,d')$ une application uniformément continue.
Alors il existe une unique fonction $g: E\to F$ uniformément continue, telle que $g_{|A} = f$.

[GOU: 25] App 40: Soit (E,d) un espace métrique.
Soient (E_1,d_1) et (E_2,d_2) deux espaces métriques complets tels qu'il existe une isométrie i_1 (resp. i_2) de E dans E_1 (resp. dans E_2), avec $i_1(E)$ (resp. $i_2(E)$) dense dans E_1 (resp. dans E_2).
Alors il existe une unique isométrie φ de E_1 dans E_2, bijective, et vérifiant $\varphi(i_1(x)) = i_2(x)$ pour tout $x\in E$.

2) Théorème de Baire

Déf 41: On dit qu'un espace métrique (E,d) est un espace de Baire si toute intersection dénombrable d'ouverts denses dans E est dense dans E, autrement dit si pour toute suite d'ouverts $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\overline{O_n} = E$ on a $\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n} = E$.

Autre formulation: On dit qu'un espace métrique (E,d) est un espace de Baire si toute réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vide de E est d'intérieur vide dans E. [GOU:397]

Th 42: Tout espace métrique complet est un espace de Baire

App 43: Soient (E,d) un espace de Baire et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fermés de E telle que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = E$.
Alors l'ouvert $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overset{\circ}{F_n}$ est dense dans E. [GOU:397]

App 44: Un espace vectoriel normé E admettant une base dénombrable n'est pas complet. [GOU:399]

App 45: On note $\mathscr{C}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $I=[0;1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{t\in I}|f(t)|$.
Alors l'ensemble des fonctions de $\mathscr{C}$ nulle part dérivables est dense dans $\mathscr{C}$. DEVLPT 2 [GOU:401]

Ex 46: On note Δ la fonction définie sur $\mathbb{R}$, 1-périodique, dont la restriction à $[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}]$ vérifie $\Delta(x)=|x|$.
Alors la fonction $f: \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^p}\Delta(2^p x)\end{array}$ est continue mais n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$. [GOU:84]

Prop 47: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.
Alors un hyperplan de E est soit fermé, soit dense dans E. [GOU:48]

Bibliographie :

[GOU] Xavier Gourdon, "Les maths en tête, analyse", 2ème édition

[ROM] Jean-Étienne Rombaldi, "Thèmes pour l'agrégation de mathématiques".

[OA] Vincent Beck, Jérôme Malick, Gabriel Peyré, "Objectif agrégation".

[ZQ] Hervé Queffélec, Claude Zuily, "Analyse pour l'agrégation", 4ème édition

les 4 principales références

[H-L] Francis Hirsch, Gilles Lacombe, "Éléments d'analyse fonctionnelle". ⟶ pour Stone-Weierstrass

[BRE] Haïm Brezis, "Analyse fonctionnelle : théorie et applications". ⟶ pour la séparabilité

Densité des polynômes orthogonaux

Référence : Beck, Malick, Peyré : Objectif agrégation, 2ème édition p.110 et p.140
Leçons : 201, 202, 207, 209, 213, 234, 239, 240, 245.

Définition 1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle *fonction poids* une fonction $\rho : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive et telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_{\mathrm{I}} |x|^n \rho(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$$

Définition 2

On note l'espace $L^2(\mathrm{I}, \rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue c'est-à-dire muni du produit scalaire :

$$\langle f, g\rangle_\rho = \int_{\mathrm{I}} f(x)\overline{g(x)}\rho(x)\,\mathrm{d}x$$

Proposition

L'espace $L^2(\mathrm{I}, \rho)$ est un espace de Hilbert. Les polynômes appartiennent à $L^2(\mathrm{I}, \rho)$.
En particulier, il existe une unique famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires orthogonaux (pour $\langle \cdot, \cdot\rangle_\rho$) deux à deux et tels que $\deg P_n = n$ (orthogonalisation de Gram-Schmidt). Cette famille s'appelle la *famille des polynômes orthogonaux* associés à la fonction poids ρ.

Théorème (Densité des polynômes orthogonaux)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction poids. On suppose qu'il existe un réel $a > 0$ tel que :

$$\int_{\mathrm{I}} \mathrm{e}^{a|x|}\rho(x)\,\mathrm{d}x < +\infty.$$

Alors les polynômes orthogonaux associés à ρ forment une base hilbertienne de $L^2(\mathrm{I}, \rho)$.

Preuve :

But : Les polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une famille orthonormée. Il reste donc à montrer qu'elle est totale, donc que $\mathrm{Vect}((P_n)_n)$ est dense dans $L^2(\mathrm{I}, \rho)$. Or $\mathrm{Vect}((P_n)_n)$ est un sous-espace vectoriel de $L^2(\mathrm{I}, \rho)$, il faut donc montrer que

$$\mathrm{Vect}((P_n)_n)^\perp = 0$$

Mais, par construction de $(P_n)_n$, on a $\mathrm{Vect}((P_n)_n) = \mathrm{Vect}((X^n)_n)$. On veut donc montrer que $\mathrm{Vect}((X^n)_n)^\perp = 0$.
En posant $g_n : x \to x^n$, cela revient à montrer :

Si $f \in L^2(\mathrm{I}, \rho)$ vérifie $\langle f, g_n\rangle_\rho = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
Alors $f = 0$.

Dans la suite, $f \in L^2(\mathrm{I}, \rho)$ et vérifie $\langle f, g_n\rangle_\rho = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Etape 1 :

Soit $f \in L^2(\mathrm{I}, \rho)$. Soit φ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) = \begin{cases} f(x)\rho(x) & \text{si } x \in \mathrm{I} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

<u>Montrons que φ est une fonction de $L^1(\mathbb{R})$.</u>

Remarquons que pour $t \geqslant 0$, on a $t \leqslant \dfrac{1+t^2}{2}$. Ainsi, on a

$$\forall x \in \mathrm{I}, \qquad |f(x)|\,\rho(x) \leqslant \frac{1}{2}(1+|f(x)|^2)\rho(x)$$

Comme ρ et ρf^2 sont intégrables sur I (par définition pour ρ et $f \in L^2(\mathrm{I}, \rho)$ pour ρf^2), on en déduit que $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$.

Etape 2 :

On peut donc considérer sa transformée de Fourier :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \qquad \widehat{\varphi}(\omega) = \int_{\mathrm{I}} f(x)\rho(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x$$

<u>Montrons que $\widehat{\varphi}$ se prolonge en une fonction F holomorphe</u> sur $B_a = \{z \in \mathbb{C}, |\mathcal{I}m(z)| < a/2\}$.

Posons, pour $z \in B_a$ et $x \in \mathrm{I}$, $g(z,x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}zx}f(x)\rho(x)$.
On définit la fonction F par :

$$\forall z \in B_a, \qquad F(z) = \int_{\mathrm{I}} g(z,x)\,\mathrm{d}x$$

Vérifions que cette fonction est bien définie :
En effet, on a $\left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}zx}\right| = \mathrm{e}^{\mathcal{I}m(z)x} \leqslant \mathrm{e}^{|\mathcal{I}m(z)||x|} \leqslant \mathrm{e}^{\frac{a|x|}{2}}$
Donc, pour $z \in B_a$, on a :

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{I}} |g(z,x)|\,\mathrm{d}x &\leqslant \int_{\mathrm{I}} \mathrm{e}^{\frac{a|x|}{2}}\,|f(x)|\,\rho(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \left(\int_{\mathrm{I}} \mathrm{e}^{a|x|}\rho(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathrm{I}} |f(x)|^2\,\rho(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(par Cauchy-Schwarz)} \\ &< \infty\end{aligned}$$

Vérifions maintenant que F vérifie les hypothèses du théorème d'holomorphie sous le signe intégrale :
H1) Pour tout $z \in B_a$, l'application $x \to g(z,x)$ est intégrable (déjà vu)
H2) Pour tout $x \in \mathrm{I}$, l'application $z \to g(z,x)$ est holomorphe (exponentielle)
H3) Pour tout $z \in B_a$, on a

$$|g(z,x)| \leqslant \underbrace{\mathrm{e}^{\frac{a|x|}{2}}\,|f(x)|\,\rho(x)}_{\text{indpt de } z \text{ et intg sur I}}$$

Donc F est bien holomorphe sur B_a et coïncide sur $\mathbb{R}$ avec $\widehat{\varphi}$.

Etape 3 :

On calcule $F^{(n)}(0)$ pour <u>montrer que si $\forall n \in \mathbb{N}, \langle f, g_n\rangle_\rho = 0$ alors $f = 0$.</u>

Le théorème précédent nous permet également de calculer les dérivées de F :

$$\forall z \in B_a, \qquad F^{(n)}(z) = (-\mathrm{i})^n \int_{\mathrm{I}} x^n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}zx} f(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x$$

Ainsi, en ayant posé $g_n : x \to x^n$, on obtient :

$$F^{(n)}(0) = (-\mathrm{i})^n \int_{\mathrm{I}} x^n f(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x = (-\mathrm{i})^n \langle f, g_n\rangle_\rho = 0$$

L'unicité du développement en série entière d'une fonction holomorphe montre que $F = 0$ sur un voisinage de 0.

Le théorème du prolongement analytique implique alors que $F = 0$ sur le connexe B_a tout entier et donc en particulier sur l'axe réel. On déduit que $\widehat{\varphi} = F|_{\mathbb{R}} = 0$.
Comme φ est intégrable (vu à l'étape 1), l'injectivité de la transformée de Fourier implique que $\varphi = 0$.
Or, ρ est strictement positive donc $f = 0$ sur presque tout I.

■

Bonus

Pourquoi imposer une telle condition (d'écrasement) sur la fonction poids ?

Contre-exemple

On considère, sur $I =]0, +\infty[$, la fonction poids $\omega(x) = x^{-\ln(x)}$.
Montrons que les polynômes orthogonaux pour le poids ω ne forment pas une base hilbertienne de $L^2(\mathrm{I}, \omega)$.
Considérons la fonction $f(x) = \sin(2\pi \ln(x))$.
Montrons que la fonction f est orthogonale à g_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ (et pourtant $f \neq 0$).
En effet,

$$\begin{aligned}
\langle f, g_n \rangle_\omega &= \int_0^{+\infty} x^{n-\ln(x)} \sin(2\pi \ln(x))\, \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-u^2+u(n+1)} \sin(2\pi u)\, \mathrm{d}u \qquad \boxed{u \leftrightarrow \ln(x)} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\left(u-\frac{n+1}{2}\right)^2+\left(\frac{n+1}{2}\right)^2} \sin(2\pi u)\, \mathrm{d}u \\
&= \mathrm{e}^{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2} \sin(2\pi t + (n+1)\pi)\, \mathrm{d}t \qquad \boxed{t \leftrightarrow u - (n+1)/2} \\
&= (-1)^{n+1} \mathrm{e}^{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2} \sin(2\pi t)\, \mathrm{d}t \\
&= 0 \qquad \text{car l'intégrande est impaire}
\end{aligned}$$

Ainsi, la famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas totale donc la famille des polynômes orthogonaux associés à ω non plus. Ce n'est pas une base hilbertienne.

Exemples de polynômes orthogonaux

- Polynômes de Hermite
  On prend I= $\mathbb{R}$ et $\rho(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.
  $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = X^2 - \frac{1}{2}$, …, $P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} \mathrm{e}^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\mathrm{e}^{-x^2})$
- Polynômes de Legendre
  On prend I= $[-1, 1]$ et $\rho(x) = 1$.
  $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = X^2 - \frac{1}{3}$, …, $P_n(x) = \frac{n!}{(2n)!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}((x^2-1)^n)$

Réponses à de possibles questions

1. D'où provient le théorème d'holomorphie sous le signe intégral ?
   ↪ [ZQ p.310] Si on se place sur un compact, c'est exactement la démo du théorème de dérivation sous le signe intégral (convergence dominée). Sinon, on se ramène au cas précédent et on utilise la formule de Cauchy.
2. Donner une famille de polynômes orthogonaux pour laquelle le théorème s'applique.
   ↪ Les polynômes de Hermite.

3. Donner la définition et une caractérisation d'une base hilbertienne.
$\hookrightarrow$ [OA p.109] Une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'un Hilbert H qui soit orthogonale, normée et totale.
On en donne une caractérisation avec les conditions suivantes qui sont équivalentes :
— la famille orthonormée $(e_n)_n$ est une base hilbertienne.
— pour tout $x \in H$, $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, e_n\rangle e_n$.
— pour tout $x \in H$, $\|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, e_n\rangle|^2$.

4. A partir de ce théorème, construire une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.
$\hookrightarrow$ [OA p.112] L'espace $L^2(\mathbb{R})$ est séparable, ses bases hilbertiennes sont donc dénombrables. On va prendre l'exemple des polynômes de Hermite et on considère :

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R},\rho) & \to & L^2(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f\sqrt{\rho} \\ \dfrac{g}{\sqrt{\rho}} & \leftarrow & g \end{array}$$

qui sont des isométries bijectives inverses l'une de l'autre. Si (P_n) sont les polynômes de Hermite, $(P_n(x)e^{-x^2/2})_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

Notes :

✓ A l'oral, on a largement le temps (5min pr introduire tout jusqu'au bus c'est bien) donc on le prends et on détaille tout de sorte que le bonus reste un bonus.
✓ Attention, dans le livre α et a sont les mêmes.
✓ Rappel : (principe de prolongement analytique) Soit $\mathcal{U}$ un ouvert connexe. Si deux fonctions analytiques coïncident sur un sous ensemble $D \subset \mathcal{U}$ ayant un point d'accumulation dans $\mathcal{U}$, alors elles sont égales sur $\mathcal{U}$.
✓ Rappel : Un point d'accumulation x d'une partie A d'un espace topologique est un point tel que :

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad B(x,\varepsilon)\cap A \neq \emptyset \text{ et } B(x,\varepsilon)\cap A \neq \{x\}$$

✓ N'a d'intérêt que si I non borné car sinon on a Weierstrass.
✓ Sert à diagonaliser des opérateurs autoadjoints compacts, résoudre des équations.

Densité des fonctions continues nulle part dérivables

Leçons : 201, 202, 205, 208, 228, *213*

[ZQ], Section VIII.I.4.e

Théorème

L'ensemble A des fonctions continues sur $[0,1]$ qui ne sont dérivables en aucun point de $[0,1]$ est dense dans $(\mathcal{C}^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$.[1]

Démonstration :

Comme $E = \mathcal{C}^0([0,1])$ est un espace de Banach, on va utiliser le lemme de Baire pour montrer $\overline{A} = E$.
Plus précisément, on va exhiber une suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :
- $\forall n \in \mathbb{N}$, F_n est fermé ;
- $\forall n \in \mathbb{N}$, F_n est d'intérieur vide ;
- $A^c \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$.

Alors on aura montré que A^c est d'intérieur vide dans E.
On pose $F_n = \{f \in E \mid \exists x \in I, \forall y \in I, |f(y) - f(x)| \leqslant n|y - x|\}$, où I désigne l'intervalle $[0,1]$.

Étape 1 : Montrons d'abord que $A^c \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$.

Soit $f \in A^c$, alors f est dérivable en au moins un point $x_0 \in I$.
Ainsi la quantité $\dfrac{f(x_0) - f(y)}{x_0 - y}$ est bornée quand $y \to x_0$.
Et f étant continue sur I, $\exists N \in \mathbb{N}, \forall y \in I, \left|\dfrac{f(x_0) - f(y)}{x_0 - y}\right| \leqslant N$ et donc $f \in F_N$.
Ainsi, $A^c \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$.

Étape 2 : Soit $n \in \mathbb{N}$, on va maintenant montrer que F_n est fermé.

Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, une suite dans F_n qui converge vers $f \in E$.
Comme les f_k sont dans F_n, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists x_k \in I, \forall y \in I, |f_k(x_k) - f_k(y)| \leqslant n\,|x_k - y| \tag{1}$$

Et comme I est compact, il existe une extraction $\left(x_{\varphi(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $x \in I$.
Soit $k \in \mathbb{N}$,

$$\left|f_{\varphi(k)}\left(x_{\varphi(k)}\right) - f(x)\right| \leqslant \underbrace{\left|f_{\varphi(k)}\left(x_{\varphi(k)}\right) - f\left(x_{\varphi(k)}\right)\right|}_{\leqslant \|f_{\varphi(k)} - f\|_\infty \xrightarrow[k\to\infty]{} 0} + \underbrace{\left|f\left(x_{\varphi(k)}\right) - f(x)\right|}_{\substack{\xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \\ (f \text{ est continue})}}$$

Donc, $\lim_{k\to\infty} f_{\varphi(k)}\left(x_{\varphi(k)}\right) = f(x)$.
Dès lors, par passage à la limite dans (1), on obtient : $\forall y \in I, |f(x) - f(y)| \leqslant n|x - y|$, donc $f \in F_n$, puis F_n est fermé.

Étape 3 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on va finalement montrer que F_n est d'intérieur vide.

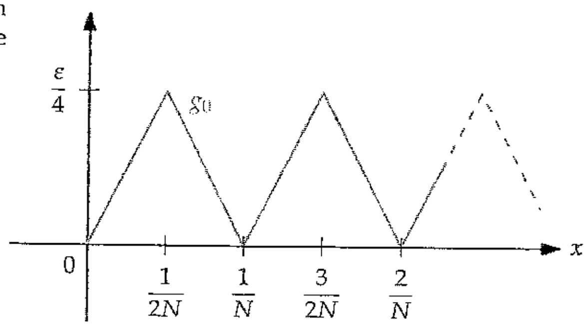
Comme E est métrique, on va montrer qu'il n'existe pas de boule ouverte $\mathcal{B}(f,\varepsilon) \subset F_n$ avec $f \in F_n$ et $\varepsilon > 0$, ie :

$$\forall f \in F_n, \forall \varepsilon > 0, \mathcal{B}(f,\varepsilon) \cap F_n^c \neq \varnothing$$

1. Quand on fait ce développement, il faut absolument être capable de donner un exemple d'une telle fonction ; allez, c'est le cadeau de la maison : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\{2^n x\}}{2^n}$, où $\{x\}$ désigne la distance de x à son entier le plus proche. Par ailleurs, une fois qu'on a montré que cette fonction est continue et nulle part dérivable, le théorème de Weierstrass implique le résultat du développement. Une application de ce théorème est de montrer que toute fonction continue s'écrit comme somme de deux fonctions continues nulle part dérivables.

Soit donc $f \in F_n$, et $\varepsilon > 0$.
Par le théorème de Weierstrass : $\exists P \in \mathbb{R}[X], \|P - f\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
Soit $N \in \mathbb{N}^*$ (à qui on imposera une condition par la suite) ; on définit g_0, fonction périodique de période $\frac{1}{N}$ telle que :

$$g_0(x) = \begin{cases} \frac{\varepsilon N}{2}x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2N}\right] \\ \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon N}{2}x & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2N}, \frac{1}{N}\right] \end{cases}$$



g_0 est continue et $\|g_0\|_\infty = \frac{\varepsilon}{4}$.

On pose $g = P + g_0$; on a : $\|f - g\|_\infty = \|f - P - g_0\|_\infty \leqslant \|f - P\|_\infty + \|g_0\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon$.
Donc $g \in \mathcal{B}(f, \varepsilon)$.
On a, pour tous $x, y \in I$: $|g(x) - g(y)| \geqslant |g_0(x) - g_0(y)| - |P(x) - P(y)|$.
De plus, pour $x \in I$, il existe $k \in [\![0, 2N-1]\!]$, tel que $x \in \left[\frac{k}{2N}, \frac{k+1}{2N}\right]$.
Puis, soit $y_x \in \left[\frac{k}{2N}, \frac{k+1}{2N}\right]$, alors on a : $|g_0(x) - g_0(y_x)| = \frac{\varepsilon N}{2}|x - y_x|$.
Et par le théorème des accroissements finis, on a : $|P(x) - P(y_x)| \leqslant \|P'\|_\infty |x - y_x|$.
Par conséquent : $\forall x \in I, \exists y_x \in I, |g(x) - g(y_x)| \geqslant \left(\frac{\varepsilon N}{2} - \|P'\|_\infty\right)|x - y_x|$.

On se rend alors compte qu'il suffit d'imposer $\frac{\varepsilon N}{2} - \|P'\|_\infty > n$, ie $N > \frac{2(n + \|P'\|_\infty)}{\varepsilon}$ dès le début pour avoir :

$$\forall x \in I, \exists y_x \in I, |g(x) - g(y_x)| > n|x - y_x|$$

Ainsi, $g \in F_n^c$, et finalement $\mathcal{B}(f, \varepsilon) \cap F_n^c \neq \varnothing$. ∎

Références

[ZQ] H. QUEFFÉLEC et C. ZUILY – *Analyse pour l'agrégation*, 4e éd., Dunod, 2013.