202 Exemples de parties denses et applications.

Dans toute la leçon (E,d) désignera un espace métrique

I) Premiers exemples de parties denses, en dim finie

A) Définitions

def 1 : Soit X un espace topologique. Un sous-ensemble $Y \subset X$ est dit dense ssi $\overline{Y} = X$. Il est dit séquentiellement dense ssi pour tout x dans X il existe une suite d'éléments de Y tendant vers x

prop 2 : Dans un espace métrique on a équivalence entre la densité et la densité séquentielle.

Ex 3 : $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont dense dans $\mathbb{R}$

prop 4 : les sous-groupes de $\mathbb{R}$ sont de la forme $n\mathbb{Z}$, ou dense dans $\mathbb{R}$.

App 5 : $\{e^{i\pi n \theta}\}_n$ est dense dans $\mathbb{S}^1$ ssi $\theta \notin \mathbb{Q}$

propriété 6 : le seul morphisme de corps sur $\mathbb{R}$ est id

propriété 7 : Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et additive ie $f(x+y) = f(x) + f(y)$, alors $f = \lambda \, id$.

def 8 : un espace topologique est dit séparable s'il contient une partie dénombrable dense

Ex 9 : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{C}^n$ est séparable car $\overline{\mathbb{Q}[i]^n} = \mathbb{C}^n$

def 10 : Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé une famille $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est dite totale si

$$\overline{\mathrm{Vect}(e_i, i \in \mathbb{N})} = E$$

B) Densité dans $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

Notation : on pose
- $D_n(\mathbb{K})$: ensemble des matrices diagonalisables sur $\mathbb{K}$, $n \times n$.
- $T_n(\mathbb{K})$: ensemble des matrices trigonalisables de taille $n \times n$ sur $\mathbb{K}$
- $C_n(\mathbb{K})$: ensemble des matrices diagonalisables à valeurs propres distinctes de taille $n \times n$ sur $\mathbb{K}$.

Rq 11 : on a $C_n(\mathbb{K}) \subsetneq D_n(\mathbb{K}) \subsetneq T_n(\mathbb{K}) \subsetneq M_n(\mathbb{K})$

prop 12 : $Gl_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense de $M_n(\mathbb{K})$

App 13 : $\forall A, B \in M_n(\mathbb{K})$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

App 14 : Soient $X, H \in M_n(\mathbb{K})$ alors

$$D_X \det(H) = \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{Com}(X) H)$$

Prop 15 : $C_n(\mathbb{K})$ et $D_n(\mathbb{K})$ sont denses dans $T_n(\mathbb{K})$

Cor 16 : $D_n(\mathbb{C})$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$

App 17 : Soit $\varphi : \begin{array}{l} M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow D_n(\mathbb{C}) \\ M \longmapsto D \end{array}$

où D est la matrice diagonalisable apparaissant dans la décomposition de Dunford de M. Alors φ n'est pas continue

App 18 : (théorème de Cayley-Hamilton) Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$, et $\chi_M(X) = \det(X I_n - M)$ Alors $\chi_M(M) = 0$

II) Parties denses en dimension infinie

A) Complétion et prolongement d'applications

def 19 : On appelle complété d'un espace métrique (E,d) un couple $((\hat{E}, \hat{d}), \varphi)$ formé d'un espace métrique complet et d'une isométrie $\varphi : (E,d) \longrightarrow (\hat{E}, \hat{d})$ telle que $\varphi(E)$ soit dense dans $\hat{E}$

thm 20 : Tout espace métrique admet un complété.

Ex 21 :
- $\hat{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ pour $|.|$ usuelle
- $\hat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}_p$ pour $|x|_p = p^{-v_p(x)}$ $x \in \mathbb{Q}$
- $\widehat{\mathbb{K}[X]} = \mathbb{K}[[X]]$ pour $P(X) = p^{-\mathrm{ord}_X(P(X))}$

thm 21 : (théorème de prolongement) Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques avec (F, d_F) complet, $D \subset E$ une partie dense de E et $f : (D, d_E) \longrightarrow (F, d_F)$ une application uniformément continue. Alors f admet un unique prolongement par continuité $\hat{f} : E \longrightarrow F$. De plus, $\hat{f}$ est une application uniformément continue

App 22 : Soit Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $C^{0,\alpha}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ α-Höldériennes. Alors $C^{0,\alpha}(\Omega) = C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$

App 23 : Unicité (à isométrie bijective près) du complété d'un espace métrique.

thm 24 : (prolongement des ALC) Soit $(E, \|.\|_E)$ un evn, $(F, \|.\|_F)$ un espace de Banach, D un sev de E dense dans E. Toute application linéaire continue (ALC) $f : D \longrightarrow F$ se prolonge de manière unique en une application linéaire continue $\hat{f} : E \longrightarrow F$ telle que $\|\hat{f}\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} = \|f\|_{\mathcal{L}_c(D,F)}$

App 25 : (intégrale de Riemann) On définit par $\mathcal{E}([a,b], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions en escalier et par $\mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réglées.

Soit $\phi : \begin{array}{l} \mathcal{E}([a,b], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \longmapsto \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \lambda_i \end{array}$

où $\lambda_i = f_{|]x_i, x_{i+1}[}$ et où $(x_1, \dots, x_n)$ est une subdivision adaptée à f.

Comme $\|\int_a^b f\| \leq (b-a) \|f\|_\infty$, ϕ est une ALC on applique le thm pour généraliser l'intégrale de Riemann aux fonctions réglées.

B) Théorème de Baire et applications

thm 26 : (Théorème de Baire) Soit (E,d) un espace métrique complet.

1) Si $(O_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'ouverts de (E,d) dense dans (E,d), alors $\Omega := \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} O_n$ est dense dans (E,d)

2) Si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de fermés de (E,d) d'intérieur vide dans (E,d), alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} F_n$ est d'intérieur vide dans (E,d).

App 27 : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable sur $\mathbb{R}$. L'ensemble des points de continuité de f' est dense dans $\mathbb{R}$

App 28 : il existe dans $C([0,1],\mathbb{R})$ des fonctions continues nulle part dérivable

App 29 : (théorème de Sunyer y Balaguer) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^\infty$ telle que $\forall x\in\mathbb{R}, \exists n_x \in \mathbb{N}, f^{(n_x)}(x) = 0$.
Alors f est une fonction polynôme sur $\mathbb{R}$

def 30 : Soit (E,d) un $\mathbb{C}$-espace vectoriel métrique complet séparable et A un opérateur continue de E. On dit que A est hypercyclique s'il existe $x\in E$ tel que $\{A^n(x), n \geq 0\}$ soit dense dans E.

[DEV 1]

thm 31 : Pour que A soit hypercyclique il suffit qu'il existe X, Y dense dans E et $B : Y \longrightarrow Y$ tq $\forall (x,y)\in X\times Y$, $A^n(x)\longrightarrow 0$, $B^n(y)\longrightarrow 0$ et $AB(y) = y$

Cor 32 : Soit $\lambda > 1$, et (e_i) base hilbertienne de $\ell^2(\mathbb{N})$ (Voir IV). L'opérateur A défini par $Ae_0 = 0$, $Ae_{i+1} = \lambda e_i$ pour $i \geq 1$ est hypercyclique.

III) Densité dans les espaces de fonctions

A) Espace des fonctions continues sur un compact.

Dans cette sous-partie, (X,d) dénotera un e.m. compact.

prop 33 : $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach séparable.

def 34 : Une partie H de $C(X)$ telle que pour tout $(x,y)\in X$ avec $x\neq y$, il existe $h\in H$ pour lequel $h(x)\neq h(y)$ est dite séparante.

def 35 : Une partie H de $C(X,\mathbb{R})$ est dite réticulée si pour tout couple $(f,g)\in H$ $\sup(f,g)\in H$ et $\inf(f,g)\in H$.

[DEV 2]

thm 36 : (Stone-Weierstrass réel) Toute sous-algèbre de $C(X,\mathbb{R})$ séparante et contenant les fonctions constantes est dense dans $C(X,\mathbb{R})$ pour $\|\cdot\|_\infty$

Cor 37 : (théorème de Weierstrass) Toute fonction continue $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de fonctions de polynômes

App 38 : l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ nulle part dérivable est dense dans $C([0,1],\mathbb{R})$ pour $\|\cdot\|_\infty$.

App 39 : Soit $f\in C([a,b],\mathbb{R})$ tq $\forall n\in\mathbb{N}$, $\int_a^b f(t)\, t^n\, dt = 0$. Alors $f = 0$.

def 40 : On dit que H, sous-algèbre de $C(X;\mathbb{C})$, est auto-conjuguée si pour tout $h\in H$, la fonction conjuguée $\bar{h}$ est dans H.

thm 41 : (Stone-Weierstrass complexe) Toute sous-algèbre H de $C(X;\mathbb{C})$ séparante, auto-conjuguée et qui contient les fonctions constantes est dense dans $C(X,\mathbb{C})$ pour $\|\cdot\|_\infty$.

App 42 : Les polynômes trigonométriques forment une famille totale de $L^2[0,2\pi]$ i.e $\overline{\mathrm{Vect}(e_n, n\in\mathbb{Z})} = L^2[0,2\pi]$ où $e_n : t \longmapsto e^{int}$.

↳ permet de mq $\varphi_x = 0 \Rightarrow x = 0$

B) Espaces L_p

On considère un espace mesuré $(X,\mathcal{F},\mu)$

def 43 :
- pour $1\leq p<\infty$: on définit $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu) := \{ f : X \longrightarrow \mathbb{K}\ \mathcal{F}\text{-mesurables tq } \int |f|^p d\mu < \infty \}$ pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
- pour $p = \infty$: on définit $\mathcal{L}^\infty_{\mathbb{K}}(\mu) := \{ f : X \longrightarrow \mathbb{K}\ \mathcal{F}\text{-mesurable tq } \exists M > 0, |f(x)| < M, \mu\text{-pp} \}$ pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

En notant $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence $f\mathcal{R}g \iff f(x) = g(x)$ μ-pp.
on définit $L^p_{\mathbb{K}}(\mu) = \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)/\mathcal{R}$ et $L^\infty_{\mathbb{K}}(\mu) := \mathcal{L}^\infty_{\mathbb{K}}(\mu)/\mathcal{R}$.

thm 44 : Soit $\mathcal{E}(X)$ l'ensemble des fonctions étagées mesurables à valeurs dans $\mathbb{K}$ ($=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), définies sur X et telles que
$$\mu(\{x : s(x) \neq 0\}) < \infty$$
Pour $1 \leq p < \infty$, $\mathcal{E}(X)$ est dense dans $L^p(\mu)$ pour $\|.\|_p$.

On considérera par la suite $\mu = \lambda$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$

App 45 : (Riemann-Lebesgue) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Alors $\int f(x) e^{itx} dx \longrightarrow 0$ quand $t \to \pm\infty$

App 46 : (Formule de l'espérance) Soit X une fonction mesurable de $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable. Alors on a $h(X) \in L^1(\Omega) \iff h \in L^1(\mathbb{R})$ et
$$\int_\Omega h(X(\omega))\, d\mu(\omega) = \int_{X(\Omega)} h(x)\, dP_X(x)$$
où $dP_X(B) = \mu(X^{-1}(B))$ est la mesure image par X de μ.

prop 47 : Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $C_c^0(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$

prop 48 : $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$

prop 49 : $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans le sous-espace de L^∞ des fonctions bornées qui tendent vers 0 à l'infini, ie $C_0^0(\Omega)$

App 50 : Soit $h \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq p < \infty$ et $\tau_h : L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ définie par $\tau_h(f)(x) = f(x+h)$. Alors τ_h est continue

App 51 : pour tout $1 \leq p < \infty$, $L^p(\mathbb{R}^n)$ est séparable

IV) Espaces de Hilbert

A) Base Hilbertienne

Dans cette partie $(\mathcal{H}, \langle.|.\rangle)$ désignera un espace de Hilbert.

prop 52 : Soit F un sev de $\mathcal{H}$. Alors F est dense dans $\mathcal{H}$ ssi $F^\perp = \{0\}$.

def 53 : On dit qu'une famille $(e_i)_{i \in I}$ est une base hilbertienne si elle est orthonormée et totale.

Ex 54 :
- base canonique de $\mathbb{C}^n$
- $(e_n = (0, \dots, 0, \underset{n}{1}, 0, \dots))_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\ell^2(\mathbb{N})$
- $(e_n : t \longmapsto e^{int})_{n \in \mathbb{Z}}$ dans $L^2[0, 2\pi]$

thm 55. Un Hilbert est séparable ssi il admet une base hilbertienne dénombrable

Cor 56 : Tous les espaces de Hilbert séparables sont isométriquement isomorphes à $\ell^2(\mathbb{N})$

Ex 57 : $B^2(D) := \mathcal{H}ol(D) \cap L^2(D)$ muni de $\|.\|_2$ est un Hilbert et $\left(z \longmapsto \sqrt{\frac{\pi}{n+1}}\, z^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne.

def 58 : Un endomorphisme $\mathcal{H}$ est dit compact si l'image de la boule unité de $\mathcal{H}$ est relativement compacte

thm 59 : Soit $\mathcal{H}$ un hilbert séparable et T un opérateur auto-adjoint compact. Alors $\mathcal{H}$ est la somme hilbertienne des sous-espaces propres de T.

thm 60 : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction de poids (ie $\rho : I \to \mathbb{R}_*^+$ mesurable telle que : $\int_I |x|^n \rho(x)\, dx < \infty$, $\forall n$) s'il existe $\alpha > 0$, tel que : $\int_I e^{\alpha|x|} \rho(x)\, dx < \infty$. Alors les polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forme une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$

Ex 61 : $I = \mathbb{R}$, et $\rho(x) = e^{-x^2}$. Les polynômes P_n sont $P_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$
il s'agit des polynômes de Hermite

B) Transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}^n)$

def + prop 62 : (Transformée de Fourier) pour $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ on pose $\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} f(y)\, dy$ qui est bien défini et dans $C_0^0(\mathbb{R}^n)$. De plus, $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$

prop 63 : si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, avec $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ alors $\hat{\hat{f}}(x) = f(-x)$
Ainsi la transformée de Fourier est injective sur $L^1(\mathbb{R}^n)$.

def 64 : on définit l'espace de Schwarz par
$$S(\mathbb{R}^n) = \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta u(x)| < \infty\}$$

Ex 65 : $\omega : x \longmapsto e^{-\pi|x|^2} \in S(\mathbb{R}^n)$ et satisfait $\hat{\omega} = \omega$

Rq 66. On a $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subsetneq S(\mathbb{R}^n) \subsetneq L^p(\mathbb{R}^n)$, $\forall 1 \leq p < \infty$

Cor 67 : $S(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$

thm 68 :
$$\mathcal{F} : S(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S(\mathbb{R}), \quad u \longmapsto \hat{u}$$
est un isomorphisme tq $\mathcal{F} \circ \mathcal{F} = \delta_{-1}$ qui se prolonge en un isomorphisme sur $L^2(\mathbb{R}^n)$.

prop 69 : Soient $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Alors
a) $\|\mathcal{F}(u)\|_2 = \|u\|_2$ (Egalité de Plancherel)
b) $\int u \mathcal{F}(v) = \int v \mathcal{F}(u)$ (Relation de dualité)
c) $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}(u) = \delta_{-1}(u)$ (Formule d'inversion)