202

Exemples de parties denses et applications

I Parties denses en dimension fini

1) Densité dans les corps $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

On munit $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ de $|\cdot|$

Proposition 1 :

(i) Soit $x \in \mathbb{R}$. La suite $\left(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}\right)_{n \geq 1}$ converge vers x

(ii) $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

Application 2 : • Le seul morphisme de corps de $\mathbb{R}$ est l'identité

• Les seuls morphismes de corps de $\mathbb{C}$ sont l'identité et la conjugaison.

Application 3 : Si $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante, l'ensemble de ses points de discontinuité de F est dénombrable

Application 4 : Les ouverts de $\mathbb{R}$ sont les réunions dénombrables de segments ouverts.

Application 5 : $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(]-\infty, r[, r \in \mathbb{Q})$

Proposition 6 : (critère de densité via la mesure de Lebesgue)
Si I est un segment de $\mathbb{R}$ et $A \subset I$ est un borélien de mesure pleine, alors A est dense dans I.

Application 7 : Les irrationnels sont denses dans $\mathbb{R}$

Proposition 8 : (classification des sous groupes de $(\mathbb{R},+)$)
Les sous groupes additifs de $(\mathbb{R},+)$ sont monogènes ou denses.

Applications 9 : • La suite $(e^{2i\pi n\theta})_{n \geq 0}$ est dense dans $\mathbb{U}$ si $\theta \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

• Les groupes $(a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}) \subset \mathbb{R}$, avec $a \times b \neq 0$ sont denses si $\frac{a}{b} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

2) Equirépartition

Def 10 : Soit $I \subset \mathbb{R}$ un segment et $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de I.
On dit que (x_n) est équirépartie dans I si les propriétés équivalentes suivantes sont vérifiées :

(i) $\forall B \in \mathcal{B}(I)$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\#\{k \in [\![0, n-1]\!] \mid x_k \in B\}}{n} = \lambda(B)$

(ii) Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue, alors $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_I f(t)\,dt$

Exemple 11 : On pose $f : x \in [0,1] \to 2x \bmod 1$
Alors pour presque tout $x \in [0,1[$, la suite $(f^n(x))_{n\geq 0}$ est équirépartie dans $[0,1]$

3) Densité dans les espaces de matrices.

On munit $M_n(\mathbb{K})$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, de $\|\cdot\|_1$

proposition 12 : $GL_n(\mathbb{K})$ ouvert dense de $M_n(\mathbb{K})$.

Application 13 : . Calcul de la différentielle du déterminant : $D_X(\det)(H) = \operatorname{tr}({}^t\mathrm{com}(X)H)$

Application 14 : Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$: $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

proposition 15 : L'ensemble des matrices diagonalisables à n valeurs propres distinctes est un ouvert dense de $M_n(\mathbb{C})$.

Application 16 : Cayley-Hamilton : $\forall M \in M_n(\mathbb{C})$: $\chi_M(M) = 0$

contre-ex 17 : Dans $M_2(\mathbb{R})$: $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ n'appartient pas à l'adhérence des matrices diagonalisables.

II. Densité dans les espaces de fonctions

1) Les fonctions continues :

Définition 18 : Soit (X,d) métrique compact $\neq \{\cdot\}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$: $H \subset C(X, \mathbb{R})$ est dite séparante si : $\forall (x,y) \in X^2$, $x \neq y \Rightarrow \exists h \in H$, $h(x) \neq h(y)$.

Exemple : La famille $(d(x,\cdot))_{x \in X}$ est toujours séparante

Théorème 19: Stone Weierstrass: Soit $A \subset C(X,\mathbb{R})$ (X compact)

Si : 1) A sous-algèbre

2) A séparante

3) A contient les fonctions constantes

Alors A est dense dans $(C(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$

Application 20: L'ensemble des fonctions lipschitziennes est dense dans $C(X,\mathbb{R})$.

DVT ① Théorème 21: Théorème de Weierstrass:

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, $a < b$.

$\exists (P_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}[X]$, $P_n \xrightarrow[CVU]{n\to+\infty} f$ sur $[a,b]$.

Application: Soit $\phi \in \mathcal{C}^0([0,1])$

Rq 22: Le théorème 21 se démontre sans l'utilisation du théorème 19.

Application 23: Si $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$; $\forall n \in \mathbb{N} : \int_0^1 f(t)t^n \, dt = 0$ alors $f = 0$

2) Densité et régularisation dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < +\infty$

Rem 24: Les espaces $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < +\infty$ sont séparables.

Déf 25: Soient $1 \le p, q \le +\infty$ deux exposants conjugués ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) et $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Alors $f*g : x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy$ est définie en tout point de $\mathbb{R}^n$.

De plus, $f*g$ est uniformément continue et bornée: $\|f*g\|_\infty \le \|f\|_p \|g\|_q$

Déf 26: On appelle approximation de l'unité une suite (ϕ_n) de $L^1(\mathbb{R}^d)$ tq:

(i) $\forall n \ge 0$, $\phi_n \ge 0$

(ii) $\forall n \ge 0$, $\int \phi_n = 1$

(iii) $\forall \delta > 0$, $\int_{B(0,\delta)^c} \phi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Théorème 27: Soit (ϕ_n) une approximation de l'unité et $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ($1 \le p < +\infty$)

Alors $f * \phi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^p} f$

Prop 28: $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, $\forall 1 \le p < +\infty$

Application 29: (Plongement de $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$)

L'application $\left(f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \mapsto \left(T_f : \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f \varphi \, dx\right)\right)$ est injective

3) Densité dans les espaces de fonction test

Prop 30: L'ensemble $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ pour la topologie des suites sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Application 31: Dans cette application, on illustre le fait que la densité permet de montrer des propriétés d'une fonction continue en ne les montrant que sur une partie dense

- La forme linéaire $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n : \varphi \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(n)$ définie une distribution tempérée, et on a:

$$\mathcal{F}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n\right) = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{2n\pi}$$

Cette identité donne la formule sommatoire de Poisson sur $\mathcal{S}$

Commentaire 32: L'application suivante montre un exemple dans lequel on utilise le théorème de prolongement des applications uniformément continues dans un cadre non normé

Application 33: Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ vérifie :

$\exists C > 0, \exists p \in \mathbb{N}, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) : |\langle T, \varphi \rangle| \le C \sup_{|\alpha|,|\beta| \le p} \|x^\alpha \partial^\beta \varphi\|_\infty$

Alors T se prolonge de manière unique en une distribution tempérée

III. Espaces de Banach et de Hilbert.

1) Théorème de Baire : Conséquence :

Théorème 29 : (X,d) métrique. Si X est complet, il est de Baire, ie :
$\forall (\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{O}^{\mathbb{N}}$ (suite d'ouverts denses :
$$\mathcal{O} := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n \text{ est dense.}$$

Application 30 : Théorème de Banach-Steinhaus :
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un Banach, $F, \|\cdot\|'$ evn $(T_i)_{i\in I} \in \mathcal{L}_c(E,F)^I$. On a équivalence entre :

(i) $\sup_{i\in I} \|T_i\| = +\infty$

(ii) $\exists x\in E$; $\sup_{i\in I} \|T_i x\| = +\infty$.

De plus $X = \{x\in E, \sup_{i\in I}\|T_i x\| = +\infty\}$ est G-dense, ie : X est une intersection dénombrable d'ouverts dense.

Application 31 : $\exists f \in C^0_{2\pi-p}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ tq La série de Fourier ne converge pas en 0.

2) Espace de Hilbert

Définition 32 : Soit $E, (\cdot,\cdot)$ un espace préhilbertien, $(e_i)_{i\in I} \in E^I$ est une base hilbertienne si la famille est orthonormée, et totale ie : $E = \overline{\mathrm{Vect}(e_i)_{i\in I}}$.

Théorème 33 : Soit $(H, (\cdot,\cdot))$ un Hilbert.
H est séparable $\Leftrightarrow$ H possède une Base Hilbertienne dénombrable

Théorème 34 : Bessel - Parseval : $E, (\cdot,\cdot)$ préhilb. sont équivalentes :

1) $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $BH_{+\infty}$

2) $\forall x\in E$: $\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2$ [Bessel]

3) $\forall (x,y)\in E$: $\langle x,y\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n\rangle \langle y, e_n\rangle$.

Théorème 35 : Critère de densité
Soit $(H, (\cdot,\cdot))$ Hilbert : F sev de H est dense dans H ssi $F^\perp = \{0\}$.

Application 36 : Si $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ mesurable ; $\exists \alpha > 0$; $\int e^{\alpha|x|} \omega(x)\,dx < +\infty$ et $\forall n\in\mathbb{N}$ $\int |x|^n \omega < \infty$
Alors : Les polynômes orthogonaux forment une BH.

Application 37 : Espace de Bergman :
- $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert connexe : $\mathcal{H}(\Omega) := \mathcal{O}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ est un Hilbert (muni $(\cdot,\cdot)_{L^2(\Omega)}$).
- $\Omega = D(0,1)$: $\mathcal{H}(D)$ Hilbert séparable
  - $\left(z \mapsto \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^n\right)$ est une BH.

DVT ②