203 : Utilisation de la notion de compacité

I) Définition et premières propriétés

1) Définition et caractérisations

Def 1 [Compacité] : Un espace séparé E est *compact* s'il vérifie la propriété de Borel-Lebesgue : $(E = \bigcup_{i \in I} O_i) \Rightarrow (\exists J \subset I \text{ fini}, E = \bigcup_{i \in J} O_i)$

Def 2 [Précompacité] : (E,d) est *précompact* si pour tout $\varepsilon > 0$, E est recouvert par un nombre fini de boules de rayon ε.

Prop 3 : Pour (X,d) espace métrique on a équivalence entre :
1) (E,d) est compact
2) (E,d) est précompact et complet
3) (E,d) vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass : de toute suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ on peut extraire une sous-suite qui converge.

Ex : • $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ n'est pas compact
• $[0,1]$ est un compact de de $\mathbb{R}$

2) Extraction diagonale

Thm 5 [Procédé diagonal] : Soit $(X_p, d_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite d'espaces métriques et $\forall p \in \mathbb{N}$, $(x_p^n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $X_p^{\mathbb{N}}$ qui admet une valeur d'adhérence.
Alors il existe une fonction d'extraction φ telle que :
$\forall p \in \mathbb{N}$, $(x_p^{\varphi(n)})$ converge dans X_p.

Cor 6 [Tychonoff] : Soit $(X_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite d'espaces métriques compacts. Alors $(\prod_p X_p)$ est compact muni de la topologie produit.

Cor 7 [Helly] : Soit $E \subset \mathbb{R}$ dénombrable et (f_n) une suite de fonctions de E dans $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in E, \forall n \geq 0, |f_n(x)| \leq 1$.
DVPT 1 (
Alors $(f_n)_n$ admet une sous suite convergente simplement sur E.

II) Fonctions continues sur un compact

1) Extremums

Prop 8 : Soit $f : E \to F$ continue et E compact. Alors $f(E)$ est compacte.

Cor 9 : Soit $f : E \to \mathbb{R}$ continue sur E compact. Alors f est bornée et atteint ses bornes.

Application 10 : [Théorème de Rolle] : • Si f est une fonction de $[a,b]$ compact dans $\mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ avec $f(a) = f(b)$, alors il existe un point $c \in]a,b[$, tel que $f'(c) = 0$.
[Lemme Urysohn] • Soit K compact convexe. La fonction $x \mapsto \frac{d(x,{}^cO)}{d(x,{}^cO)+d(x,K)}$ est définie et est telle que $1_K \leq \varphi \leq 1_O$

Prop 11 : Soit E evn de dimension finie et $f : E \to \mathbb{R}$ continue coercive. Alors f est minorée et atteint son minimum.

Application 12 : Théorème d'Alembert-Gauss : Tout polynôme non constant à coefficients complexes admet au moins une racine.

Prop 13 : Soit C convexe compact et $f : C \to \mathbb{R}$ strictement convexe sur C.
Alors f admet un unique minimum sur C.

Application 14 : [Ellipsoïde de John-Loewner] : Soit K compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$. Alors, il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K.

2) Points fixes

Prop 15 : Soit f une application de (E,d) compact dans lui même telle que $\forall (x,y) \in E^2$, $(x \neq y) \Rightarrow d(f(x),f(y)) < d(x,y)$. Alors f possède un unique point fixe l dans E.

Thm 16 [Brouwer] : Soit B la boule unité fermée et $f : B \to B$ continue.
Alors T admet un point fixe.

Application 17 [Perron-Frobenius]: Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ positive. Alors $\rho(A)$ est une valeur propre de A, associée à un vecteur propre positif.

3) Théorème de Heine et applications

Thm 18 [Heine]: Soit f une application continue de (E,d) compact dans (F,d'). Alors f est uniformément continue.

Exemple 19: Toute fonction continue admettant des limites finies en $\pm\infty$ est uniformément continue.

Applications 20. . Théorème de Fejer: Si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est continue 2π-périodique, alors: $\lim_{N \to +\infty} \| f * \left(\sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) c_n(f) e_n\right) - f \|_\infty = 0$

DVPT 2

. Théorème de Dini: Soient (f_n) une suite croissante de fonctions continues d'un compact K dans $\mathbb{R}$ et $f: K \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que f est limite simple de (f_n) dans K. Alors la convergence est uniforme.

Corollaire: Théorème Glivenko-Cantelli: Soit (X_k) une suite iid de fonction de répartition F. Si on pose $F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq k \leq n} \mathbb{1}_{\{X_k \leq t\}}$, alors p.s., on a:

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |F_n(t) - F(t)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

III) Compacité dans les EVN

1) En dimension finie

Prop 21: Toutes les normes sont équivalentes dans un EVN de dimension finie.

Corollaire 22: Les compacts de E evn de dimension finie sont exactement les fermés bornés de E.

Ex 23: . $O_n = \{ M \in M_n(\mathbb{R}) / {}^tMM = I_n \}$ est compact dans $M_n(\mathbb{R})$.

. Soit E plan euclidien de dimension 2. L'ensemble P_n des polygônes à n sommets $x_1, \dots, x_n$ dont les côtés sont de longueur $l > 0$ fixée est un compact de E^n.

Thm 24 [Riesz]: Soit E un EVN, alors on a équivalence entre:

1) $\dim(E) < +\infty$

2) $\overline{B_E} = \{ x \in E / \|x\| \leq 1 \}$ est compacte dans E.

2) En dimension infinie

Def 25: Soient E et F deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(E,F)$. On dit que T est compact si $T(\overline{B_E})$ est relativement compact.

Ex 26: . Soit $E = (C^0([0,1], \mathbb{C}), \| \|_\infty)$ et $L: [0,1]^2 \to \mathbb{C}$ continue. Alors

$$T: f \mapsto Tf: \begin{array}{l} [0,1] \to \mathbb{C} \\ x \mapsto \int_0^1 L(x,y) f(y)\, dy \end{array}$$ est compacte.

. Si $E = \ell^2$ et $u: (x_n)_{n \geq 1} \mapsto \left(\frac{x_n}{n}\right)_{n \geq 1}$ alors $u \in K(\ell^2)$.

. Prop 27: L'ensemble des opérateurs de rang fini est dense dans l'ensemble des opérateurs compacts. si F est un Hilbert!

. Thm 28. [Théorème spectral des opérateurs compacts]: Soit T un opérateur compact.
Alors: . $\sigma(T) = \text{Spectre}(T) \subset [-\|T\|, \|T\|]$ et $\sigma(T)$ est compact.
. $0 \in \sigma(T)$ et $\sigma(T) \setminus \{0\} = \{ \lambda \in \mathbb{R} / \exists x \neq 0, Tx = \lambda x \} \setminus \{0\}$.
. soit $\sigma(T) = 0$
. soit $\sigma(T)$ est fini
. soit $\sigma(T) \setminus \{0\}$ est une suite qui tend vers 0

IV Espaces de fonctions continues.

1) Théorème de Stone-Weierstrass

Def 25 : [Partie séparante] Soit F espace métrique complet et $V \subset \mathcal{C}(K,F)$ avec K compact. On dit que V est séparante si :

$$\forall (x,y) \in K^2,\ (x \neq y) \Rightarrow (\exists f \in V,\ f(x) \neq f(y))$$

Thm 30 : [Stone-Weierstrass] Soit A une sous-algèbre de $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ avec K compact contenant les constantes et séparante. Alors, A est dense dans $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$.

Thm 31 : [Stone-Weierstrass complexe] Soit A une sous-algèbre de $\mathcal{C}(K,\mathbb{C})$ contenant les constantes et séparante. Si, de plus A est auto-conjuguée ($f \in A$ ssi $\bar{f} \in A$), alors A est dense dans $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$.

Ex 32 : Soit $K \subset \mathbb{R}^d$ compact. Posons $A = \{x \mapsto P(x) \mid P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_d]\}$. Alors A est dense dans $\mathcal{C}^0(K,\mathbb{R})$.

- En particulier, [Théorème de Weierstrass] : Si $K = [a,b]$ et $d = 1$, alors les polynômes sont denses dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.

2) Théorème d'Ascoli

Def 33 : [Equicontinue] : Une partie H de $\mathcal{C}(K,F)$ est dite équicontinue en $x \in H$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall y \in K,\ (d(x,y) < \alpha) \Rightarrow (\forall f \in H,\ d(f(x), f(y)) < \varepsilon)$.

Thm 34 : [Ascoli] Soit K un espace métrique compact, F un espace métrique complet et H une partie de $\mathcal{C}(K,F)$. On suppose que $H(x)$ est relativement compact pour tout $x \in K$ et que H soit équicontinu en tout point de K. Alors, H est relativement compact dans $\mathcal{C}(K,F)$.

Ex 35 : L'ensemble des applications lipschitziennes de rapport k, de l'intervalle $[0,1]$ dans $[a,b]$ est compact.

3) Applications du théorème d'Ascoli

- Théorème de Cauchy-Peano :

Le problème de Cauchy : $\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = f(t,x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ pour f continue admet une solution (x, J) où $J = [t_0 - T, t_0 + T]$ où $T = \min(a, \frac{b}{M})$ avec a, b et M tels que :

$$\sup_{\substack{|t-t_0| \leq a \\ |x-x_0| \leq b}} |f(t,x)| \leq M$$

Remarque 37 : Ce résultat donne l'existence mais pas l'unicité de la solution : contre exemple $\begin{cases} x'(t) = 3x^{\frac{2}{3}} \\ x(0) = 0 \end{cases}$ admet $x_1(t) = 0$ et $x_2(t) = t^3$ comme solution sur $\mathbb{R}$.

- Espace de Sobolev H^1.

Pour $I =]a,b[$ borné de $\mathbb{R}$, on pose

$$H^1(I) = \{u \in L^2(I) \mid \exists g \in L^2(I), \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I), \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi\}$$

On lui associe le produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle = \int_I uv + \int_I u'v'.$$

Prop 38 : (i) $H^1(I)$ est un Hilbert

(ii) $H^1(I)$ s'injecte de façon compacte dans $\mathcal{C}^0(\bar{I})$

(iii) $H^1(I)$ s'injecte de façon continue dans $L^2(I)$.

Références : - Zuily-Queffelec
- Pommelet
- Briane-Pagès
- Brézis
- Hirsch-Lacombe
- Choquet