203

Utilisation de la notion de compacité

I) Généralités.

1) Borel-Lebesgue

[GOU, p 27]

Def 1: Un espace topologique séparé E est compact si pour tout recouvrement de E par des ouverts de E ($E = \bigcup_{i \in I} O_i$) il existe un sous-recouvrement fini ($E = \bigcup_{j \in J} O_j$, $J \subset I$ fini)

Prop 2: Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'un espace topologique séparé convergeant vers une limite x. Alors $\{x_n / n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est compact.

2) Bolzano-Weierstrass

[GOU 28]

Prop 3: Un espace métrique (E,d) est compact ssi de toute suite de E, on peut extraire une sous-suite convergente dans E.

[GOU p30]

Cor 4: (E,d) est compact
ssi toute suite de E admet au moins une valeur d'adhérence
ssi toute partie infinie de E admet au moins un point d'accumulation.

Prop 5: Les espaces compacts sont complets.

Prop 6: Soit (E,d) compact et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de E admettant une unique valeur d'adhérence x. Alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x.

Prop 7: Les parties compacts de $\mathbb{R}^n$ sont les fermés bornés

II) Compacité et fonctions continues

1) Théorème de Hein

Thm 8: Soient (E,d) et (F,δ) deux espaces métriques et $f: E \to F$ une application continue. Si E est compact alors f est uniformément continue.

ex 9: Les fonctions périodiques et continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ sont uniformément continues.

Appl 10: (Théorèmes de Dini)

* 1er théorème: Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions continues, réelles, définies sur $[a,b] \subset \mathbb{R}$.
Si (f_n) converge simplement alors la convergence est uniforme.
* 2nd théorème: Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions croissantes continues, réelles, définies sur $[a,b] \subset \mathbb{R}$
Si (f_n) converge simplement alors la convergence est uniforme.

2) Point fixe

Prop 11: Soit (E,d) un espace métrique compact et $f: E \to \mathbb{R}$ continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes.

Appl 12: Soit (E,d) un espace métrique compact et $f: E \to E$ telle que: $\forall (x,y) \in E^2, x \neq y \quad d(f(x), f(y)) < d(x,y)$

Alors f admet un unique point fixe.
De plus la suite définie par $\begin{cases} x_0 \in E \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$ converge vers ce point fixe.

p400]

Prop 13 (Théorème de Brouwer) :
Soit K un convexe compact et $f : K \to K$ une application continue. Alors f admet au moins un point fixe.

③ Théorème d'Hadamard

Def 14 : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. On dit que f est propre si l'image réciproque de tout compact est propre.

Thm 15 (Théorème d'Hadamard)
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction $\mathcal{C}^1$.
Les deux conditions suivantes sont équivalentes :
- i) f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$
- ii) f est propre et le déterminant du jacobien de f est partout non nul.

④ Théorème de Weierstrass

Thm 16 : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue.
Alors f est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de fonctions polynômes.

Appl 17 : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue.
Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\int_a^b x^n f(x)\,dx = 0$, alors f est nulle sur $[a,b]$.

⑤ Image d'un compact

Prop 18 : Soit (E,d) un espace métrique compact, (F,δ) un espace métrique et $f : E \to F$ une fonction continue.
Alors $f(E)$ est compact.

Appl 19. Soit (E,d) compact et $f : E \to E$ continue telle que : $\forall (x,y) \in E^2 \quad d(f(x), f(y)) \geq d(x,y)$
Alors f est une isométrie bijective.

III Théorème d'Ascoli

On considère (X,d) un espace métrique compact et $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$ muni de la distance d_∞.

Def 20 : Une partie d'un espace métrique est dit relativement compact si son adhérence est compact.

Def 21 : Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$. $\mathcal{F}$ est équicontinue en $x_0 \in X$ si
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall f \in \mathcal{F} \ \forall x \in X \quad d(x_0, x) \leq \delta \Rightarrow d(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$$
$\mathcal{F}$ est dite équicontinue si elle l'est en tout point de X.

Thm 22 : Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$. Il y a équivalence entre :
1. $\mathcal{F}$ est relativement compacte
2. $\mathcal{F}$ est équicontinue et bornée.

IV Compacité et espaces vectoriels normés.

① Dimension finie

Thm 23: Dans un evn de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Cor. 24: Les parties compactes d'un evn de dimension finie sont les parties fermées bornées.

Thm 25: Un evn est de dimension finie si et seulement si la boule unité fermée est compacte.
(Théorème de Riesz).

② Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$.

Thm 26. Soit G un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$. Alors il existe q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ telle que $G \subset O(q)$

Thm 27: Les sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$ sont exactements les sous-groupes de O_n à conjugaison près.

Références:

Gourdon, Analyse

Zuily-Queffélec, Analyse pour l'agrégation

Daniel Li, Cours d'analyse fonctionnelle.

Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$

Références :
- Alessandri, *Thèmes de Géométrie*, p.141 et 160

Enoncés :

Théorème 1

Soit G un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$, alors il existe q forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ telle que $G \subset \mathcal{O}(q)$.

Théorème 2 (*Enoncé équivalent*)

Les sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$ sont exactement les sous-groupes de $\mathcal{O}_n$ à conjugaison près.

Preuve : On va montrer les résultats suivants :

Lemme 1

L'enveloppe convexe d'un compact en dimension finie est compacte.

Utilise le théorème de Carathéodory qui borne le nombre de points à utiliser pour décrire l'enveloppe convexe.

Si on note alors $\beta_n = \{x \in E \mid x \text{ est combinaison convexe de } n \text{ points de K}\}$. Alors le théorème de Carathéodory nous donne $\beta_{n+1} = \mathrm{Conv}(K)$ en dimension n.

Ainsi en notant $C_n = \{(t_1, \cdot, t_n) \in [0,1]^n \mid \sum t_i = 1\}$, l'application $C_{n+1} \times K^{n+1} \to \mathrm{Conv}(K)$ définie par $(t, X) \mapsto \sum t_i X_i$ est surjective et continue. Elle envoie donc ce produit de compacts qui est compact sur un compact.

Lemme 2

Soit $K \subset E$ convexe compact non-vide en dimension finie. $v \in \mathcal{L}(E)$ (continue) telle que $v(K) \subset K$, alors il existe $x \in K$ tel que $v(x) = x$

Soit dans $x \in K$, posons $(x_n)_n$ la suite définie par $x_0 = x$ et $x_{n+1} = v(x_n)$. Soit alors $u_n = (n+1)^{-1} \sum_{0 \leq i \leq n} x_i$ suite dans $\mathrm{Conv}(K)$. D'après le lemme 1, par compacité, il existe une extraction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $(u_{\varphi(n)})_n$ converge vers $u \in \mathrm{Conv}(K)$. Alors :

$$v(u_{\varphi(n)}) = \frac{1}{\varphi(n)+1} \sum_{k=0}^{\varphi(n)} v(x_k) = \frac{1}{\varphi(n)+1} \sum_{k=0}^{\varphi(n)} x_{k+1} = u_{\varphi(n)} + \frac{x_{\varphi(n)+1} - x_0}{\varphi(n)+1} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} u$$

Donc par continuité de v, $v(u) = u$.

Théorème 3

Si G sous-groupe compact de $GL(E)$, et K compact convexe non vide de E, alors il existe un élément de K fixé par tous les éléments de G.

Lemme 3

Il existe une norme sur E qui soit G-invariante : $\forall g \in G, x \in E$, on a $N(g \cdot x) = N(x)$.

On pose $N(x) = \max_{g\in G} \|gx\|$. Cette application existe par compacité et il est évident qu'elle est positive définie homogène et G-invariante. De plus $N(x+y) \leq \max_{g\in G} \|gx\|+\|gy\| \leq \max_{g\in G} \|gx\| + \max_{g\in G} \|gy\| \leq N(x) + N(y)$. C'est donc bien une norme.

On remarque également que le cas d'égalité : $N(x+y) = N(x) + N(y)$ nécessite $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$. En particulier x et y doivent être positivement liés (cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire $\Rightarrow$ cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz $\Rightarrow$ positivement liés).

On peut maintenant prouver le théorème 3 : Posons pour $g \in G$, $F_g = \{x \in K \mid gx = x\}$ fermé de K. Alors par propriété de Borel-Lebesgue pour le compact K : $\cap_g F_g = \emptyset$ **ssi** $\exists p$ tel que $\cap_{1\leq i\leq p} F_{g_i} = \emptyset$.

Soit donc $p \geq 0$, $\{g_1, \cdot, g_p\} \subset G$. Posons $g = p^{-1} \sum_{1\leq i\leq p} g_i \in \mathcal{L}(E)$. Alors d'après le lemme 2, il existe un $x \in K$ tel que $gx = x$. Ainsi $N(gx) = N(x)$ et de plus comme N est G-invariante, pour tout i, on a $N(g_i x) = N(x)$. D'où :

$$N(x) = N(gx) = N\left(\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} g_i x\right) \leq \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} N(g_i x) = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} N(x) = N(x)$$

D'après la remarque précédente, les $g_i x$ sont positivement liés, et comme ils sont de même norme, alors ils sont égaux et égaux à $gx = x$. D'où $x \in \cap_{i\leq p} F_{g_i}$.

On a donc bien montré l'existence d'un point fixe de K sous l'action de G.

A partir de ces résultats : Soit G sous-groupe compact de $GL(E)$, $(E, \|\cdot\|)$ espace euclidien.

On considère $\rho : G \to GL(S_n)$, $A \mapsto {}^t A\_A$. C'est une co-action de groupe linéaire de G sur S_n. $\rho(G)$ est donc un sous-groupe compact de $GL(S_n)$ (ρ est continue car polynomiale en les coefficients de A).

Considérons alors $X = \mathrm{Conv}(\{{}^t MM \mid M \in G\})$. Par hypothèse + lemme 1, c'est un compact convexe non vide de S_n. Et donc d'après le résultat intermédiaire : $\exists S \in X$ telle que $\forall M \in G$, $\rho(M)S = S$.

Soit donc $\langle\cdot,\cdot\rangle_S : (x, y) \mapsto \langle x, Sy\rangle$ c'est bien un produit scalaire sur E car $S \in S_n^{++}$ et de plus pour tout $M \in G$, $\langle Mx, SMx\rangle = \langle x, {}^t MSMx\rangle = \langle x, Sx\rangle$. Donc $G \subset \mathcal{O}(\langle\cdot,\cdot\rangle_S)$.

$\square$

Théorème d'Ascoli

2014-2015

Nous allons ici montrer une version un peu affaiblie du théorème d'Ascoli, qui permet de caractériser les compacts des espaces de fonctions continues.

On se place dans la suite dans un espace métrique compact (X, d), et on considère l'ensemble $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ des fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$, muni de sa distance infinie d_∞.

Définition. Une partie $\mathcal{F}$ de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ est dite ***équicontinue en*** x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(x_0, \varepsilon) \text{ tel que } \forall f \in \mathcal{F}, \forall x \in X, \quad \mathrm{d}(x_0, x) \leq \delta \Rightarrow \mathrm{d}(f(x_0), f(x)) \leq \varepsilon$$

$\mathcal{F}$ sera dite ***équicontinue*** si elle l'est en tout point.

Lemme. Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$, si $\mathcal{F}$ est équicontinue, alors $\mathcal{F}$ est uniformément équicontinue.

Démonstration Supposons $\mathcal{F}$ équicontinue.

Soit $\varepsilon > 0$. Alors pour tout $x \in X$, il existe $\eta_x > 0$ tel que :

$$\forall y \in X, \forall f \in \mathcal{F}, \mathrm{d}(x, y) < 2\eta_x \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

$\bigcup_{x \in X} B(x, \eta_x)$ est un recouvrement d'ouverts de X, et X est compact, donc il existe $x_1, \ldots, x_n \in X$ tels que $X = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \eta_{x_i})$.

On pose $\eta := \min_{1 \leq i \leq n} \eta_{x_i}$.

Soient $f \in \mathcal{F}$, $x \in X$, et $1 \leq i \leq n$ tel que $\mathrm{d}(x, x_i) \leq \eta_{x_i}$. Soit enfin $y \in X$ tel que $d(x, y) < \eta$.

Alors $\mathrm{d}(x, x_i) < \eta_{x_i}$ donc $|f(x) - f(x_i)| < \varepsilon$ et :

$$\mathrm{d}(y, x_i) \leq \mathrm{d}(y, x) + d(x, x_i) < \eta + \eta_{x_i} \leq 2\eta_{x_i}$$

donc $|f(y) - f(x_i)| < \varepsilon$.

Finalement :

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(y)| < 2\varepsilon$$

Donc $\mathcal{F}$ est uniformément équicontinue. □

Théorème d'Ascoli Soit X un espace métrique compact, $\mathcal{F}$ une partie de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathcal{F}$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ pour la topologie induite par d_∞
2. $\mathcal{F}$ est équicontinue et bornée.

Démonstration :

$\boxed{1. \Rightarrow 2.}$ Soit $\varepsilon > 0$, comme $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ est relativement compacte, on peut prendre $f_1,...,f_p \in \mathcal{F}$ tels que $\mathcal{F} = \cup_{i=1}^{n} B(f_i,\varepsilon)$. $\mathcal{F}$ est donc bornée, montrons qu'elle est équicontinue.

Soit $x_0 \in X$; pour $1 \leq i \leq p$, f_i étant continue en x_0, il existe δ_i tel que

$$\forall x, \mathrm{d}(x,x_0) \leq \delta_i \Rightarrow |f_i(x), f_i(x_0)| \leq \varepsilon$$

Les f_i sont alors équicontinues en x_0, de constante $\delta(x_0,\varepsilon) = \min\{\delta_1,\dots,\delta_p\}$.

Soient maintenant $f \in \mathcal{F}$, et i tel que $f \in B(f_i,\varepsilon)$. Pour $x \in B(x_0,\varepsilon)$, on a :

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(x_0)| + |f_i(x_0) - f_i(x)| \\ &\leq 3\varepsilon\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout x_0, $\mathcal{F}$ est bien équicontinue.

$\boxed{2. \Rightarrow 1.}$ Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ équicontinue, donc uniformément équicontinue d'après le lemme, et bornée. Prenons une suite $(f_n)_n \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, on va montrer qu'on peut en extraire une sous-suite convergente.

X étant compact, il est séparable, et soit alors $\Delta = \{x_1,\dots,x_n,\dots\}$ une partie dénombrable et dense de X.

$\mathcal{F}$ étant bornée, il existe $M < +\infty$ tel que $\forall n, \|f_n\|_\infty \leq M$. Ainsi, $\forall x \in X, (f_n(x))_n$ est un ensemble borné, on peut donc en extraire une sous-suite convergente. On va récursivement appliquer ce procédé aux points de Δ, et construire une suite d'extractions $((f_{k,n})_n)_k$ dont le $k-$ième terme vérifie la propriété

$$\forall 1 \leq i \leq k,\ f_{k,n}(x_i) \longrightarrow_n l_i \qquad (P_k)$$

- On extrait $(f_{1,n})_n$ de $(f_n)_n$, de manière à ce que $(f_{1,n}(x_1)) \longrightarrow_n l_1$
- Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $((f_{k,n})_n)_k$ vérifie (P_k). On extrait $(f_{k+1,n})_n$ de $(f_{k,n})_n$, de manière à ce que $f_{k+1,n}(x_{k+1}) \longrightarrow_n l_{k+1}$. $(f_{k+1,n})_n$ vérifie alors bien (P_{k+1}).

La suite $(g_n)_n = (f_{n,n})_n$ est alors une extraction de $(f_n)_n$ qui vérifie :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ g_n(x_k) \longrightarrow_n l_k \qquad (P_\infty)$$

Nous allons montrer que $\mathcal{G} = \{(g_n)_n, n \in \mathbb{N}\}$ est uniformément Cauchy, autrement dit $(g_n)_n$ est convergente pour d_∞.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ est aussi uniformément équicontinue. Prenons δ (que l'on choisit inférieur à ε) tel que

$$\forall x,y \in X, \forall k \in \mathbb{N}, \mathrm{d}(x,y) \leq \delta \Rightarrow |g_k(x) - g_k(y)| \leq \varepsilon$$

Comme $\Delta = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ est dense dans X, on a

$$X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B(x_k, \delta)$$

X étant compact, on peut extraire un sous-recouvrement fini, et, plus simplement, il existe K tel que

$$X = \bigcup_{k=1}^{K} B(x_k, \delta)$$

Comme pour tout k, $(g_n(x_k))_n$ est de Cauchy, $\{(g_n(x_1))_n, \ldots, (g_n(x_K))_n\}$ est uniformément Cauchy, soit donc N tel que

$$\forall 1 \leq k \leq K, \quad m, n \geq N \Rightarrow |g_n(x_k) - g_m(x_k)| \leq \varepsilon$$

Soit enfin $x \in X$. Prenons k tel que $\mathrm{d}(x, x_k) \leq \varepsilon$. On a, $\forall m, n \geq N$,

$$\begin{aligned} |g_m(x) - g_n(x)| &\leq |g_m(x) - g_m(x_k)| + |g_m(x_k) - g_n(x_k)| + |g_n(x_k) - g_n(x)| \\ &\leq 3\varepsilon \end{aligned}$$

Ceci étant vrai quelque soit x, $\mathcal{G}$ est bien uniformément Cauchy, et on a ainsi extrait une sous-suite de $(f_n)_n$ convergeant vers f pour d_∞. La fonction f étant limite uniforme de fonctions continues vers X complet (car compact), f est bien dans $\mathcal{C}(X)$. Ainsi, l'adhérence de $\mathcal{F}$ est compacte (càd $\mathcal{F}$ est précompacte). □

Source. Daniel Li, *Cours d'analyse fonctionnelle*