203 [Nou]

Utilisation de la notion de compacité. [ZQ]

Dans cette leçon, on se place au minimum dans le cadre d'espaces métriques.

I - Notion de compacité :

1) Définitions et premières propriétés :

Déf 1 : Un espace métrique (K,d) est dit compact si de tout recouvrement d'ouverts de K, on peut extraire un sous-recouvrement fini : c'est la propriété de Borel-Lebesgue :

$$\Big(K \subset \bigcup_{j\in J} \omega_j\Big) \Rightarrow \Big(\exists I \subset J \text{ fini}, K \subset \bigcup_{i\in I} \omega_i\Big)$$

Prop 2 : K est compact si et seulement si de toute suite à valeurs dans K, on peut extraire une sous-suite convergente dans K

App 3 : Une suite d'un compact converge si et seulement si elle possède une unique valeur d'adhérence. contre-exemple : $(-1)^n$, $\min(0, n(-1)^n)$

Prop 4 : Un compact est fermé borné.

Thm 5 : (de Bolzano-Weierstrass)
De toute suite réelle bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

Ex 6 : $\begin{cases} u_{n+1} = \sin(u_n) \\ u_0 \in [-1,1] \end{cases}$ donne une suite convergente.

App 7 : Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle. Alors $(x_n)_{n\geq 0}$ converge si et seulement si $\forall t \in \mathbb{R}$, $(e^{itx_n})_{n\geq 0}$ converge.

Ainsi, si $(X_n)_{n\geq 0}$ est une suite de variables aléatoires qui converge en loi vers X avec chaque X_n qui est une gaussienne, alors X est une gaussienne.

2) Fonctions continues et compacité :

Thm 8 : (de Heine)
Une fonction continue sur un compact, est uniformément continue.

App 9 : (Théorème de Weierstrass)
Toute fonction continue sur $[0,1]$ est limite uniforme de fonctions polynomiales.

Thm 10 : L'image d'un compact par une application continue est compact.

C-ex 11 : $\sin^{-1}([-1,1]) = \mathbb{R}$ n'est pas compact.

App 12 :
- Soit $f : K \to E$, avec E un espace de Banach, telle que $\forall x,y \in K, x \neq y \Rightarrow \|f(x)-f(y)\| < \|x-y\|$. Alors f admet un unique point fixe.
- Soit $f : K \to K$ continue telle que f possède un unique point fixe ℓ. Alors la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ℓ pour tout $u_0 \in K$.
- Soit $f : K \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d'}$ continue injective, K compact. Alors f est un homéomorphisme sur son image.

II - Compacité et espace normé :

1) Cas de la dimension finie :

Prop 13 : Un fermé borné de $\mathbb{R}^d$ est compact.

[ZQ]

[ZQ]

Thm 14 : (de Riesz)
Un espace vectoriel normé est de dimension finie si et seulement si sa boule unité est compacte.

App 15 : En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Ex 16 : Soit $\alpha : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique définie positive. Alors il existe une constante $k > 0$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $\alpha(x,x) \geqslant k \cdot \|x\|^2$.

Thm 17 : Toute application linéaire de $\mathbb{R}^d$ dans un espace vectoriel normé quelconque est continue.

App 18 : Pour $T \in \mathcal{L}(E,F)$, on pose $\|T\| := \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$. Si E est de dimension finie, alors il existe $x_0 \in E$ tel que $\|x_0\| = 1$ et $\|Tx_0\| = \|T\|$.

2) Dimension infinie et espaces fonctionnels :

Thm 19 : (de Tychonoff)
Un produit dénombrable d'espaces compacts est compact pour la topologie produit.

[ZQ]

App 20 : (Théorème de Banach-Alaoglu)
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé séparable. Soit $(T_n)_{n \geq 0}$ une suite bornée de formes linéaires continues. Alors il existe une sous-suite $(T_{n_k})_{k \geq 0}$ et une forme linéaire continue T telles que $\forall x \in E$, $T_{n_k}(x) \xrightarrow[k \to +\infty]{} T(x)$

Thm 21 : (d'Ascoli)
Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})$ avec (K,d) un espace compact. On munit $\mathcal{C}^0(K,\mathbb{R})$ de la norme infinie $\|f\|_\infty = \sup_K |f|$.
Alors ($\overline{\mathcal{A}}$ compact dans $\mathcal{C}^0(K,\mathbb{R})$ pour $\|\cdot\|_\infty$)

$$\iff \begin{cases} \bullet\ \mathcal{A} \text{ bornée pour } \|\cdot\|_\infty \\ \bullet\ \mathcal{A} \text{ est équicontinue en tout point :} \\ \forall x_0 \in K, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in K, d(x,x_0) < \eta \Rightarrow \forall h \in \mathcal{A}, |h(x) - h(x_0)| \leq \varepsilon \end{cases}$$

[ZQ]

App 22 : (Théorème de Montel)
Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions holomorphes définies sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$. On suppose que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ est bornée sur tout compact. Alors il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k \geq 0}$ et une fonction holomorphe f telles que (f_{n_k}) converge uniformément vers f sur tout compact.

[Bre]

App 23 : (Théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov) $\boxed{\text{DÉV}}$
Soit $U \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert tel que $\overline{U} \subset \Omega \subset \mathbb{R}^d$ avec Ω un ouvert borné. Soit $\mathcal{F} \subset L^p(\Omega)$ un sous-ensemble borné avec $1 \leq p < \infty$. On suppose que
$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta \in]0, d(U, \complement\Omega)[, \forall h \in \mathbb{R}^d, \forall f \in \mathcal{F}, \|h\| < \eta \Rightarrow \|\tau_h f - f\|_{L^p(U)} < \varepsilon$,
où τ_h est la translation de h.
Alors $\overline{\mathcal{F}_{|U}}$ est un compact de $L^p(U)$.

Ex 24 : Pour $g \in L^1(\mathbb{R})$ et $B \subset L^p(\mathbb{R})$ borné, l'ensemble $\{ g * f \mid f \in B \}$ vérifie les hypothèses du thm précédent.

III - Équations différentielles ordinaires :

[Dem]

Déf 25 : On appelle solution maximale du problème de Cauchy $\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^d \end{cases}$ avec $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ toute solution (I, x) telle que si (J, y) est une autre solution avec $I \subset J$, alors $I = J$ et $x = y$.

Thm 26 : (de Cauchy-Lipschitz)
Soit $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continue et localement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable. Alors il existe une unique solution maximale (I, x) au problème de Cauchy $\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^d \end{cases}$ telle que $t_0 \in I$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$ ouvert.

[Dem]

Thm 27 : (de sortie de tout compact)
Dans le même cadre, soit $(]T_*, T^*[, x)$ l'unique solution maximale du problème de Cauchy $\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^d \end{cases}$. Si $T^* < +\infty$, alors la solution sort de tout compact au voisinage de T^* : $\lim_{\substack{t \to T^* \\ t \in]T_*, T^*[}} \|x(t)\| = +\infty$.

Thm 28 : (de Hadamard-Lévy) — $\boxed{\text{DÉV}}$
Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ de classe $\mathcal{C}^2$.
Alors f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$ si et seulement si
- $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $D_x f$ est inversible.
- f est propre, ie l'image réciproque de tout compact est compact.

[ZQ]

Rq 29 :
- le théorème reste vrai dans le cas où $f \in \mathcal{C}^1$ mais l'hypothèse $\mathcal{C}^2$ simplifie la preuve.
- f est propre dans $\mathbb{R}^d$ si et seulement si $\lim_{\|x\| \to +\infty} \|f(x)\| = +\infty$

Thm 30 : (de Cauchy-Arzela-Peano) [ZQ]
Le problème de Cauchy $\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$ pour $f : [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B(x_0, r)} \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ continue avec $T, r > 0$ admet au moins une solution maximale.

Ex 31 : $\begin{cases} y' = 3 \cdot |y|^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ admet au moins une solution maximale. Il n'y a pas unicité : $y_0 \equiv 0$ sur $\mathbb{R}$ et $y_1(t) = t^3$ pour $t \in \mathbb{R}$. [Dem]

[Bre] : Analyse Fonctionnelle, Haïm Brezis
[Dem] : Analyse numérique et équations différentielles, Jean-Pierre Demailly
[Nou] : Agrégation de mathématiques, Épreuve Orale. Ivan Nourdin
[ZQ] : Analyse pour l'agrégation, Zuily-Queffélec

Théorème de Hadamard-Lévy

Mouzard - Morin

Théorème. *Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ de classe C^2. Alors f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$ si et seulement si*

- *$D_x f$ est inversible pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.*
- *f est propre, c'est-à-dire si l'image réciproque de tout compact par f est compact.*

Démonstration : Supposons pour commencer que f est effectivement un difféomorphisme de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$. Alors pour tout compact K, $f^{-1}(K)$ est un compact en tant qu'image d'un compact par l'application continue f^{-1}. De plus, comme $f \circ f^{-1} = Id$, on a $D_{f^{-1}(x)} f \circ D_x f^{-1} = Id$ et ainsi $D_x f$ inversible pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.
Supposons désormais f propre et $D_x f$ inversible pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. On va chercher à construire une application $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ surjective telle que $f \circ g = Id$. Ainsi, f sera injective car g est surjective, et surjective car inversible à droite. Pour ça, on construit une famille $(g_t)_{0 \leq t \leq 1}$ d'applications telles que :

$$\forall t \in [0,1], f \circ g_t = tId,$$

et ainsi, $g := g_1$ répondra au problème. En supposant que chaque application est différentiable, on a nécessairement :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, (D_{g_t(x)} f) \left(\partial_t g_t(x)\right) = x.$$

Ainsi, on va étudier le système différentiel suivant pour $x \in \mathbb{R}^d$ fixé

$$\begin{cases} \partial_t g_t(x) & = & \left(D_{g_t(x)} f\right)^{-1}(x), \\ g_0(x) & = & 0. \end{cases}$$

Pour obtenir la condition initiale, on suppose que f s'annule en 0, quitte à considérer la fonction $f - f(0)$ sans perte de généralités. Comme f est de classe C^2, sa différentielle est de classe C^1 et il existe une unique solution maximale $(t,x) \mapsto g_t(x)$ définie et de classe C^1 sur

$$\bigcup_{x \in \mathbb{R}^d} \Big( ]T_*(x), T^*(x)[\times \{x\} \Big) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d.$$

Ainsi, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et $t \in [0, T^*(x)]$:

$$tx = \int_0^t x \mathrm{d}s = \int_0^t \left(D_{g_s(x)} f\right)\left(\partial_t g_s(x)\right) \mathrm{d}s = f \circ g_t(x) - f \circ g_0(x) = f \circ g_t(x).$$

Il suffit alors de montrer que $T^*(x_0) > 1$. Supposons que pour $x_0 \in \mathbb{R}^d$ fixé, on ait $T^*(x_0) < \infty$. Le théorème de sortie de tout compact nous garantit que $|g_t(x_0)| \underset{t \to T^*(x_0)}{\longrightarrow} \infty$. Comme f est propre, on en déduit que $|(f \circ g_t)(x_0)| \underset{t \to T^*(x_0)}{\longrightarrow} \infty$. Or comme $|(f \circ g_t)(x_0)| = |tx_0| \leq T^*(x_0)|x_0|$, c'est absurde. Donc $T^*(x_0) = \infty > 1$.

On a alors construit une inverse à droite de f avec $g := g_1$. On peut montrer grâce au lemme de Gronwall que g est continue. On montre ensuite qu'elle est surjective. $\mathbb{R}^d$ étant connexe, on va montrer que l'image de g est ouvert et fermé. Comme f est un difféomorphisme local en tout point, son inverse g l'est aussi, et ainsi $g(\mathbb{R}^d)$ est ouvert. On va utiliser la caractérisation séquentielle du caractère fermé pour conclure. Soit $(y_n = g(x_n))_n$ une suite de $g(\mathbb{R}^n)$ qui converge vers $y \in \mathbb{R}^d$. f étant continue, la suite $(x_n = f(y_n)$ converge vers $x = f(y)$. g étant aussi continue, la suite $(g(x_n) = y_n)_n$ converge vers $g(x)$. Par unicité de la limite, on a $g(x) = y$ et ainsi $g(\mathbb{R}^d)$ fermé. Par connexité, on conclut que g est surjective. Comme f est localement un C^1-difféomorphisme par le théorème d'inversion locale, g est localement de classe C^1, et donc de classe C^1. Ainsi, f est un difféomorphisme global.

$\square$

Théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov

Mouzard - Morin

Théorème. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et soit U un ouvert tel que $\bar{U}$ soit compact et $\bar{U} \subset \Omega$. Soit $\mathscr{F}$ un sous-ensemble bornée de $L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p < \infty$. On suppose que*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta \in]0, d(U, \complement\Omega)[, \forall h \in \mathbb{R}^n, \forall f \in \mathscr{F}, |h| < \eta \implies \|\tau_h f - f\|_{L^p(U)} < \varepsilon,$$

où $\tau_h f$ est la translation de f par h. Alors $\mathscr{F}|_U$ est relativement compact dans $L^p(U)$.

Démonstration : Comme $\bar{U}$ est borné, on peut supposer Ω bornée. Pour $f \in \mathscr{F}$, on pose $\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. On a alors $\bar{\mathscr{F}} := \{\bar{f} | f \in \mathscr{F}\}$ est borné dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ mais aussi dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ car Ω est borné. On commence par se ramener aux fonctions continues à l'aide de suites régularisantes pour pouvoir appliquer le théorème d'Ascoli et conclure. Soit $(\rho_n)_{n\geq 0}$ une suite régularisante. On a alors

$$\forall \bar{f} \in \bar{\mathscr{F}}, \forall n > \frac{1}{\eta}, \quad \|\rho_n * \bar{f} - \bar{f}\|_{L^p(U)} < \varepsilon.$$

En effet, l'inégalité de Hölder nous donne

$$|\rho_n * \bar{f}(x) - \bar{f}(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\bar{f}(x-y) - \bar{f}(x)|\rho_n(y)\mathrm{d}y \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\bar{f}(x-y) - \bar{f}(x)|^p \rho_n(y)\mathrm{d}y\right)$$

Comme le support de ρ_n est dans la boule $B(0, \frac{1}{n})$, on a

$$|(\rho_n * \bar{f})(x) - \bar{f}(x)|^p \leq \int_{B(0,\frac{1}{n})} |\bar{f}(x-y) - \bar{f}(x)|^p \rho_n(y)\mathrm{d}y.$$

Ainsi, en appliquant le théorème de Fubini,

$$\int_U |(\rho_n * \bar{f})(x) - \bar{f}(x)|^p \mathrm{d}x \leq \int_{B(0,\frac{1}{n})} \rho_n(y) \left(\int_U |\bar{f}(x-y) - \bar{f}(x)|^p \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y \leq \varepsilon^p,$$

ce qui donne la majoration annoncée.
On va alors appliquer le théorème d'Ascoli à $\mathscr{A}_n := \{\rho_n * \bar{f}|_{\bar{U}} \; ; \; f \in \mathscr{F}\}$. D'abord, on utilise que $\mathscr{F}$ est bornée dans L^p par une constante M et on applique encore une fois l'inégalité de Hölder :

$$|(\rho_n * \bar{f})(x)| \leq \int_{B(0,\frac{1}{n})} \|\rho_n\|_\infty |f(y)|\mathrm{d}y \leq MC_n.$$

Ainsi, $\mathscr{A}_n$ est bornée en $\|\cdot\|_\infty$. On montre alors que $\mathscr{A}_n$ est uniformément équicontinue, et ainsi équicontinue en tout point : soient $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ et $f \in \mathscr{F}$.

$$\begin{aligned}
|(\rho_n * \bar{f})(x_0) - (\rho_n * \bar{f})(x_1)| &\leq \int_{B(0,\frac{1}{n})} |\rho(y-x_0) - \rho(y-x_1)||f(y)|\mathrm{d}y \\
&\leq \|x_1 - x_2\| \|\rho_n'\|_\infty C_n \|\bar{f}\|_1 \\
&\leq M\tilde{C}_n |x_1 - x_2|.
\end{aligned}$$

On a donc que $\mathscr{A}_n$ est relativement compact dans $C(U)$, et donc dans $L^p(U)$ car $\|\cdot\|_{L^p(U)} \leq C_U \|\cdot\|_{\infty,U}$.
On peut alors conclure : soit $\varepsilon > 0$. On fixe $n > \frac{1}{\eta}$, ainsi $\forall f \in \mathscr{F}, \|(\rho_n * f) - f\|_{L^p(U)} < \varepsilon$.
Comme $\mathscr{A}_n$ est relativement compact dans $L^p(U)$, on peut le recouvrir par un nombre fini de boules de rayon ε, pour la norme $\|\cdot\|_{L^p(U)}$. En considérant les boules de rayon 2ε, on a un recouvrement fini de $\mathscr{F}|_U$.
Ainsi, $\mathscr{F}|_U$ est relativement compact dans $L^p(U)$.

$\square$