203 Utilisation de la notion de compacité.

Dans tout ce qui suit, X et Y sont deux espaces topologiques.

I Définitions, propriétés élémentaires.

Déf. 1

(i) L'espace X est dit compact si sa topologie est séparée et si tout recouvrement par des ouverts $X = \bigcup_{i\in I} \Omega_i$ admet un sous-recouvrement fini $X = \bigcup_{j=1}^{n} \Omega_{i_j}$, $i_j \in I$.

(ii) Une partie $A \subset X$ est dite compacte dans X si elle est compacte pour la topologie induite.

Ex. 2 Tout ensemble fini muni de la topologie discrète est compact. S'il est muni d'une autre topologie, il n'est pas compact car non séparé.

Ex. 3 Supposons X compact. Soit R une relation d'équivalence sur X. Alors X/R (muni de la topologie quotient) est compact ssi séparé.

Ex 4 Tout produit fini de compacts est compact (pour la topologie produit).

Prop. 5 Supposons X séparé et soit $A \subset X$ compact. Alors A est un fermé de X. En particulier, si X est compact alors les parties compactes de X sont exactement les parties fermées.

Prop 6 Les parties compactes de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ sont exactement les parties fermées bornées.

Ex. 7 $[0,1]$ est compact. La boule unité $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ est compacte. Le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ est compact.

II Application à l'existence d'éléments.

Th. 8 (Fermés emboîtés) Supposons X compact. Soit $F_0 \supset F_1 \supset F_2 \supset \cdots$ une suite de fermés non vides de X. Alors $\bigcap_n F_n \neq \emptyset$.

App. 9 L'ensemble triadique de Cantor est non vide et non dénombrable.

App. 10 Si X est compact alors X possède la propriété de Baire.

Prop. 11 (Compacité séquentielle) Supposons X compact. Soit $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$. Alors $(x_n)_n$ possède une valeur d'adhérence. On dit que X est séquentiellement compact.

Prop. 12 Supposons que X est de plus un espace métrique. Alors si X est séquentiellement compact, il est compact. En particulier, X est complet.

App. 13 (Brouwer) Soit $\overline{\mathbb{D}} \subset \mathbb{R}^2$ le disque unité fermé et $f : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$ continue. Alors f possède un point fixe. DEVELOPPEMENT 1

App. 14 (Kakutani) Soit E un espace normé et $K \subset E$ convexe compact non vide. Toute application affine continue $T : K \to K$ admet un point fixe.

App. 15 (Riesz) Soit E un espace normé. Alors E est de dimension finie si et seulement si sa boule unité est compacte.

Lemme 16 Soit E un espace normé et $F \subset E$ un sous-espace fermé. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $u \in E$ avec $\|u\| = 1$ et $d(u,F) \geq 1 - \varepsilon$.

III Extrémalisation de fonctions continues.

Th. 17 Supposons X compact et Y séparé. Soit $f : X \to Y$ continue. Alors $f(X)$ est un compact de Y.

Cor. 18 Supposons X compact. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ continue. Alors f atteint ses bornes.

App. 19 (Équivalence des normes) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $\|.\|$, $\|.\|'$ deux normes sur E. Alors $\|.\|$ et $\|.\|'$ sont équivalentes.

App. 20 (Rolle) Soit $a<b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Conséquence : si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est de classe C^n sur $[a,b]$ et $(n+1)$-fois dérivable sur $]a,b[$ alors il existe $c \in]a,b[$ avec

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

App. 21 (Théorème spectral) Soit $n \geq 1$ et $A \in S_n(\mathbb{R})$ symétrique réelle. Alors

(i) La matrice A admet une valeur propre réelle.

(ii) La matrice A est diagonalisable en base orthonormée.

Pour montrer (i), on extrémalise $x \longmapsto \frac{\langle x | Ax \rangle}{\|x\|^2}$.

App. 22 (Décomposition polaire) Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ $(n \geq 1)$. Alors il existe un unique couple $(S,O) \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \times O_n(\mathbb{R})$ avec $A = OS$. De plus, O^{-1} est le maximum sur $O_n(\mathbb{R})$ de $U \longmapsto Tr(UA)$.

IV Régularité et régularisation.

Prop. 23 Supposons X et Y séparés. Soit $f : X \to Y$ est continue et bijective. Si X est compact alors f est un homéomorphisme.

App. 24 Soit E un espace normé, $K \subset E$ un compact non vide et $f : K \to K$ surjective et 1-lipschitzienne. Alors f est une isométrie.

Th. 25 (Heine) Supposons que X et Y sont aussi des espaces métriques et soit $f : X \to Y$ continue. Si X est compact alors f est uniformément continue.

App. 26 Soit $1 \leq p < +\infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R})$. Alors :

$$\| f(x+h) - f(x) \|_{L^p_x} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

(On approche f par des fonctions continues à support compact, donc uniformément continues).

App. 27 Les fonctions continues sur un segment sont intégrables au sens de Riemann.

Th. 28 (Dini) Supposons X compact et soit $f_0, f_1, \ldots : X \to \mathbb{R}$ continues avec $f_0 \leq f_1 \leq \cdots$. Supposons en outre que les f_n convergent simplement vers une fonction continue $f : X \to \mathbb{R}$. Alors cette convergence est uniforme.

App. 29 Supposons X compact. Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert admettant une base hilbertienne $(e_n)_{n \geq 1}$. Alors pour $h : X \to H$ continue,

$$\sum_{k=1}^{N} |\langle e_n | h(x) \rangle|^2 \xrightarrow[N \to +\infty]{} \|h(x)\|^2 \quad \text{uniformément sur } X.$$

App. 30 Les fonctions réglées (limites uniformes de fonctions étagées) sont Riemann-intégrables.

Th. 31 (Stone-Weierstraß) Supposons X compact et notons $C(X)$ l'ensemble des fonctions continues $X \to \mathbb{R}$. Soit $A \subset C(X)$ une sous-algèbre telle que

(i) A sépare les points : $(\forall x \neq y, \exists f \in A \mid f(x) \neq f(y))$

(ii) De plus $(\forall x \in X, \exists f \in A \mid f(x) \neq 0)$

Alors A est dense dans $C(X)$ pour $\|\cdot\|_\infty$.

Rq 32 De tels énoncés utilisent lourdement le fait que tout espace topologique compact est séparable.

V Compacité dans certains espaces de fonctions.

Th. 33 Soit $1 \leq p < +\infty$ et $A \subset \ell^p(\mathbb{N})$ telle que

(i) A est bornée dans $\ell^p(\mathbb{N})$ (pour $\|\cdot\|_p$)

(ii) A est uniformément sommable : $(\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 0 \mid \forall u \in A, \sum_{n \geq N} |u(n)|^p \leq \varepsilon)$

Alors $\bar{A}$ est une partie compacte de $\ell^p(\mathbb{N})$.

Th. 34 (Ascoli) Supposons que X est de plus un espace métrique compact. Soit $A \subset C(X)$ telle que

(i) A est une partie bornée de $C(X)$.

(ii) A est une partie équicontinue :

$$\left(\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall y \in X, \forall f \in A, d(x,y) \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \right)$$

Alors $\bar{A}$ est une partie compacte de $C(X)$.

App. 35 (Cauchy-Peano) Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ ouvert connexe et $f : D \to \mathbb{R}^d$ continue. Alors le problème de Cauchy $(y_0 \in D)$

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

admet une solution maximale définie sur $I \subset \mathbb{R}$ intervalle ouvert avec $0 \in I$. Elle n'est pas unique a priori.

App. 36 (Rellich) Soit $1 \leq p < +\infty$ et A une partie bornée de l'espace de Sobolev $W^{1,1}(0,1)$. Alors $A \subset L^p(0,1)$ et $\mathrm{Adh}_{L^p}(A)$ est une partie compacte de $L^p(0,1)$.

Th. 37 (Riesz-Fréchet-Kolmogorov) Soit $1 \leq p < +\infty$ et $A \subset L^p(\mathbb{R})$ telle que

(i) A est borné dans $L^p(\mathbb{R})$

(ii) A est uniformément intégrable :

$$\left(\forall \varepsilon > 0, \exists R > 0 \mid \forall f \in A, \int_{|x| \geq R} |f(x)|^p dx \leq \varepsilon \right)$$

(iii) On a :

$$\left(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall f \in A, \forall |h| \leq \delta, \int_{\mathbb{R}} |f(x+h) - f(x)|^p dx \leq \varepsilon \right)$$

Alors $\bar{A}$ est une partie compacte de $L^p(\mathbb{R})$.

Th. 38 (Montel) Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $(f_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes telles que pour chaque $K \subset \Omega$ compact

$$(\exists M > 0 \mid \forall z \in K, |f(z)| \leq M)$$

Alors il existe une suite extraite $(f_{\phi(n)})_n$ qui converge uniformément sur chaque compact de Ω vers une fonction holomorphe $f : \Omega \to \mathbb{C}$.

VI. Opérateurs compacts

Dans toute cette partie, $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach et B_E est sa boule unité.

Déf. 39 On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des opérateurs continus $E \to E$. Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

(i) On dit que λ est une <u>valeur propre</u> de T et on note $\lambda \in vp(T)$ si l'opérateur $\lambda I - T$ est non injectif.

(iii) On dit que λ est valeur spectrale de T et on note $\lambda \in \sigma(T)$ si $\lambda I - T$ est non inversible dans $\mathcal{L}(E)$.

Rq. 40 Comme E est de Banach, $\lambda I - T$ est non inversible si et seulement si non surjectif.

Ex. 41 On regarde les opérateurs $\ell^2(\mathbb{N}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{N})$ définis par

$$S : (u_0, u_1, \dots) \longmapsto (0, u_0, u_1, \dots)$$
$$T : (u_0, u_1, \dots) \longmapsto (u_1, u_2, \dots)$$

Alors $\sigma(T) = \sigma(S) = \overline{\mathbb{D}}$ et $vp(T) = \mathbb{D}$, $vp(S) = \emptyset$.

Def. 42 Un opérateur $T \in \mathcal{L}(E)$ est dit compact si $\overline{T(B_E)}$ est compact. On note alors $T \in \mathcal{K}(E)$.

Ex. 43 Tout opérateur de rang fini est compact.

Prop. 44 L'ensemble $\mathcal{K}(E)$ est un fermé de $\mathcal{L}(E)$. En particulier, toute limite dans $\mathcal{L}(E)$ d'opérateurs de rang fini est compacte.

Prop. 45 Supposons que $E := H$ est un espace de Hilbert. Alors tout opérateur compact est limite d'opérateurs de rang fini.

Ex. 46 (Opérateurs à noyaux) Soit $K : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ continue. Alors l'opérateur $T_K : L^2(0,1) \longrightarrow L^2(0,1)$ défini par

$$\left(\forall f \in L^2(0,1), \quad T_K f(x) = \int_0^1 K(x,y) f(y)\, dy\right)$$

est compact.

Th. 47 (alternative de Fredholm) Soit $T \in \mathcal{K}(E)$ opérateur compact. Alors,

(i) $\dim \operatorname{Ker}(I - T) < +\infty$ DÉVELOPPEMENT 2

(ii) $\operatorname{Im}(I - T)$ est un sous-espace fermé de E.

(iii) $I - T$ est injectif ssi $I - T$ est inversible.

Cor. 48 Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $T \in \mathcal{K}(E)$. Alors

(i) $\dim \operatorname{Ker}(\lambda I - T) < +\infty$

(ii) $\lambda \in vp(T) \iff \lambda \in \sigma(T)$.

Th. 49 Supposons $\dim E = +\infty$. Soit $T \in \mathcal{K}(E)$. Alors $0 \in \mathbb{C}$ est le seul point d'accumulation de $\sigma(T)$, s'il y en a un.

Dans ce qui suit, $E = H$ est un $\mathbb{C}$-espace de Hilbert séparable.

Def./Prop. 50 Si $T \in \mathcal{L}(H)$, il existe un unique $T^* \in \mathcal{L}(H)$ tel que $\langle Tx | y \rangle = \langle x | T^* y \rangle$ pour $x, y \in H$. C'est l'opérateur adjoint de T.

Ex. 51 On reprend les notations de l'Ex. 46. Alors l'adjoint de T_K est $T_{\tilde{K}}$ où $\tilde{K}(x,y) = \overline{K(y,x)}$.

Th. 52 Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ autoadjoint ($T^* = T$) compact. Alors $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ et il existe une base hilbertienne de H formée de vecteurs propres de T.

Ex. 53 Soit $f \in L^2(0,1)$. On note Tf l'unique solution dans $H^1(0,1)$ de

$$\begin{cases} -(pu')' + qu = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

où $p \in C^1[0,1]$ vérifie $p \geq \alpha_0 > 0$ et $q \in C^0[0,1]$ vérifie $q \geq 0$.

Alors la restriction $T : L^2(0,1) \longrightarrow L^2(0,1)$ est autoadjointe et compacte.