203 — Utilisation de la Notion de Compacité

I. Généralité sur les compacts :

1) La propriété de Borel-Lebesgue :

Def 1 : (E,τ) un espace topologique, E est compact si E est séparé et si pour tout recouvrement d'ouverts de E, on peut en extraire un sous recouvrement fini.

Ex 2 :
- $([0,1], |\cdot|)$ est compact
- $(E$, topologie discrète$)$ est compact si $|E| < +\infty$.
- $(\bar{\mathbb{R}}, d)$ avec $d(x,y) = |\mathrm{Arctan}(x) - \mathrm{Arctan}(y)|$ est compact

Th 3 : (Tykhonov) (admis dans le cas indénombrable)
$(K_i)_{i\in I}$ famille de compacts. Alors $\prod_{i\in I} K_i$ est compact pour la topologie produit. (topologie de la convergence simple)

Ex 4 :
- $S = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est compact pour la topologie produit
- $\{0,1\}^S$ est compact " "

Prop 5 : Un sous ensemble fermé d'un compact est compact.

2) Le cas (E,d) métrique :

Def 6 : (E,d) est séquentiellement compact si $\forall (x_n) \in E^{\mathbb{N}}$, $\exists \varphi$ extractrice et $x \in E$ tels que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[+\infty]{} x$

Ex 7 :
- $([0,1], |\cdot|)$ est séquentiellement compact.
- Soit (u_n) une suite convergente vers l dans (E,d). $\{u_n, n\geq 0\} \cup \{l\}$ est séquentiellement compact.

Appl° 8 : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, P est une application fermée.

Th 9 : (Bolzano-Weierstrass)
Compact $\Leftrightarrow$ Séquentiellement compact.

Contre-ex 10 : (E,d) em est vital : $\{0,1\}^S$ n'est pas séquentiellement compact.

Prop 11 : Compact $\Rightarrow$ fermé, borné, complet, séparable.

Def 12 : K est précompact si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists I$, $|I| < +\infty$, $\exists (x_i)_I \in E^I$ telle que $K \subset \bigcup_{i\in I} B(x_i, \varepsilon)$.

Prop 13 : (K,d), compact $\Leftrightarrow$ précompact et complet

3) Compact de $(E, \|\cdot\|)$ un evn :

Th 14 : (Bolzano-Weierstrass)
Les compacts de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ sont les sous ensembles fermés bornés.

Cor 15 : $(E, \|\cdot\|_\infty)$, $\dim E < +\infty$. Les compacts de E sont les sous ensembles fermés bornés.

App 16 : - Équivalence des normes si $\dim E < +\infty$ ⚠ E un $\mathbb{K}$-ev avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Th 17 : (Riesz)
La boule unité fermée de E est compacte $\Leftrightarrow \dim E < +\infty$.

Ex 18 :
- $\bar{B}(0,1)$ de $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|_2)$ n'est pas compact
- $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_{e^1}$ ne sont pas équivalentes dans $\mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$
- $f : (\mathbb{R}[X], \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$, $P \mapsto P'(1)$ est linéaire non continue.

4) Ensemble des parties compactes non vide d'un em :

Def 19 : $A, B \subset E$ compacts non vide, $d_H(A,B) = \max\{\max_{x\in A} d(x,B), \max_{y\in B} d(y,A)\}$

Th 20 : (Hausdorff) Soit (E,d) un em complet. $(\mathcal{H}(E), d_H)$ est un em complet et
$\mathcal{H}(E) = \{K \subset E, K \neq \emptyset \text{ compact}\}$. $d_H(A\cup B, C\cup D) \leq \max\{d_H(A,C), d_H(B,D)\}$.

Th 21 : (Hutchinson) (E,d) e.m. complet.
Soient $T_1, \ldots, T_n$ des $c_1, \ldots, c_n$-contraction de E dans E. Alors $T : \mathcal{H}(E) \to \mathcal{H}(E)$, $A \mapsto T_1(A) \cup \ldots \cup T_n(A)$ est une $c = \max_{1\leq i\leq n} c_i$ contraction.

Appl 22 :
- Construction de l'espace de Cantor comme point fixe.
- Construction du triangle de Sierpinski.

[Sk

II. Compacité et fonctions continues : théorème d'existence ;

1) Compacité et continuité :

Th 23 : (Heine) Soit K un compact. F un e.m., K e.m. également.
$f : K \to F$ continue $\Rightarrow$ f est uniformément continue.

Appl 24 :
- 2° th de Dini : (f_n) suite de fonctions croissantes définie sur $[a,b]$. $f_n \xrightarrow[+\infty]{cvs} f$, f continue. Alors $f_n \xrightarrow[+\infty]{cvu} f$.
- Convergence des sommes de Riemann.

[H_2G_2]

Prop 25 : $(a_m)\in K^{\mathbb{N}}$, K compact, (u_m) admet une unique valeur d'adhérence $\Rightarrow$ (u_m) converge.

App 26 :
- $\exp : S_m \to S_m^{++}$ est un homéomorphisme.
- $(U_m \times H_m^{++}) \to GL_m(\mathbb{C})$ la décomposition polaire est un homéomorphisme.

Prop 27 : Soit (K_m) une suite de compacts décroissante, $K_m \neq \emptyset$ $\forall m\in\mathbb{N}$. Alors $\bigcap K_m \neq \emptyset$.

App 28 : – 1$^{\text{er}}$ théorème de Dini : Soit (f_m) une suite croissante $\forall m$, $f_m\in\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, telle que $f_m \underset{+\infty}{\overset{cvs}{\to}} f$ avec $f\in\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. Alors $f_m \underset{+\infty}{\overset{cvu}{\to}} f$.

Prop 29 : Soit $f\in\mathcal{C}^0(E,F)$, $K\subset E$ compact, E et F des e.m. Alors $f(K)$ est compact.

2) Compacité et recherche d'extrema :

Cor 30 : Soit $f\in\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$, K compact $\Rightarrow$ f bornée sur K et atteint ses bornes.

[Z-Q]

App 31 :
- $(a_k)_{1\le k\le m}\in(\mathbb{R}_+^*)^m$, $\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \frac{1}{a_i}\right)^{-1} \le (a_1\ldots a_m)^{1/m}$.
- Principe du maximum : Soient $\Omega\subset\mathbb{R}^m$ ouvert, $u\in\mathcal{C}^2(\Omega,\mathbb{R})$, $u\in\mathcal{C}^0(\bar\Omega,\mathbb{R})$, vérifiant $Lu = \sum_{i,j} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j} + \sum_i b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \geq 0$ avec $(a_{ij})_{i,j}$ des fonctions continues localement uniformément définies positives et $(b_i)_i$ des fonctions continues. Alors u atteint son maximum sur $\partial\Omega$.
- Th : (Carathéodory) Soit E un e.v. de dimension finie. Si K est compact, alors $\operatorname{conv}(K)$ est compact.

Def/Prop 32 : Soient $(E,\|\cdot\|_E)$, $(F,\|\cdot\|_F)$ deux evn, $\dim E<+\infty$. Soit $f\in\mathcal{C}^0(E,F)$. f est propre si $\lim_{\|x\|_E\to+\infty}\|f(x)\|_F = +\infty$. f est propre ssi $\forall K\subset F$ compact, $f^{-1}(K)$ est compact.

Ouvrard (Z-Q) (B-B)

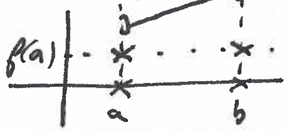
App 33 : – Th : (Hadamard-Lévy) Soit $f\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^m)$, équivalence :
- i) f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.
- ii) f est propre et df_x est inversible $\forall x\in\mathbb{R}^m$.

Prop 34 : Soit E un evn, $\dim E<+\infty$. Soit $f\in\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$ coercive, i.e. $f(x)\underset{\|x\|\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$. Alors f est minorée et atteint son minimum.

App 35 : – Th : (d'Alembert) Soit $P\in\mathbb{C}[X]$. Si P est nonconstant, alors P admet une racine dans $\mathbb{C}$.

Th 36 : (Rolle) Soit $f\in\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, dérivable sur $]a,b[$. $f(a)=f(b) \Rightarrow \exists c\in]a,b[$, $f'(c)=0$

Ctre-ex :



App 37 :
- Th : (Accroissement finis) Soit $f\in\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ dérivable sur $]a,b[$. Alors $\exists c\in]a,b[$ tel que $\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=f'(c)$.
- $P\in\mathbb{R}[X]$, P scindé sur $\mathbb{R}$. Alors P' est scindé sur $\mathbb{R}$.

3) Compacité et points fixes :

[B-B]

Th 38 : Soit $(E,\|\cdot\|)$ un evn, $K\subset E$ compact. Soit $f\in\mathcal{C}^0(K,K)$ telle que $\forall x,y\in K$, $\|f(x)-f(y)\|<\|x-y\|$. Alors f admet un unique point fixe ℓ et $\forall x_0\in K$, la suite (u_m) vérifiant $u_0=x_0$, $u_{m+1}=f(u_m)$, converge vers ℓ.

Rq 39 : $x>1$, $a_x=\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x-1}}$. Soit $f_x : [0,a_x]\to[0,a_x]$, $x\mapsto x-x^x$. Soit (u_m) définie par $u_0\in]0,a_x[$, $u_{m+1}=f_x(u_m)$. Alors $u_m \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{((x-1)m)^{\frac{1}{x-1}}}$. Si x est grand, on a une convergence très lente vers le point fixe.

Ctre-ex 40 : – $f : [1,+\infty[\to[1,+\infty[$, $x\mapsto x+\frac{1}{x}$ n'admet pas de point fixe.

Cor 41 : $K\subset E$, compact étoilé. Soit $f\in\mathcal{C}^0(K,K)$ 1-lipschitzienne. Alors f admet un point fixe.

Ctre-ex 42 : – Rotation d'angle $\alpha\notin 2\pi\mathbb{Z}$ de centre 0 sur la couronne $\bar B(0,x_2)\setminus \mathring{B}(0,x_1)$, $x_2>x_1>0$.

[Testard]

Th 43 : (Kakutani) Soit E un $\mathbb{R}$-e.v.n, $G\leq GL(E)$, G compact. Soit $K\subset E$ compact convexe non vide. Si $\forall u\in G$, $u(K)\subset K$, alors $\exists x\in K$ tel que $u(x)=x$ $\forall u\in G$. ($\dim E<+\infty$)

Cor 44 : Soit $G\leq GL_m(\mathbb{R})$, G compact. G est conjugué à un sous groupe de $O_m(\mathbb{R})$.

[G-T] journal de l'ENS de Lyon.

Th 45 : (Brouwer) $(\mathbb{R}^m,\|\cdot\|)$, $f\in\mathcal{C}^0(\bar B(0,1),\bar B(0,1))$. Alors f admet un point fixe.

Cor : $K\subset\mathbb{R}^m$ un compact convexe non vide. Si $f\in\mathcal{C}^0(C,C)$, alors f admet un point fixe.

App 46 : – Soit $A\in\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ à coefficients positifs. Alors $\rho(A)$ est une valeur propre associée à un vecteur propre positif.

Th 47 : (Schauder) Soit E un espace de Banach. Soit $f\in\mathcal{C}^0(C,C)$, Soit $K\subset E$ compact convexe non vide, alors f admet un point fixe.

III. Compacité et espaces fonctionnelles:

1) Compacts des espaces de fonctions et équations différentielles:

[Dem]
[H-L]

Prop 47: K compact, (F,d) complet $\Rightarrow (\mathcal{C}^0(K,F), \|\cdot\|_\infty)$ est complet

Rappel 48: Th: (Banach) Soit (E,d) un e.m. complet, f une application contractante. Alors f admet un unique point fixe.

App 49: - Th: (Cauchy-Lipschitz) Soit $f: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continue et localement lipschitzienne pour la deuxième variable.
Alors $(\mathcal{E}) : \begin{cases} y'(t) = f(t,y(t)) \\ y(0) = c \end{cases}$ admet une unique solution maximale.

Th 50: (Ascoli) $A \subset \mathcal{C}(K,F)$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. équivalence:
(i) A est relativement compact dans $\mathcal{C}(K,F)$
(ii) A est équicontinue et $\forall x\in K$, $\{f(x), f\in A\}$ est relativement compact dans F.

App 51: - Th: (Montel) $A \subset \mathcal{H}(\Omega)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. A est relativement compact si $\forall K\subset \Omega$, $\exists M_K > 0$ tel que $\forall f\in A$, $\|f\|_{\infty,K} \le M_K$.
- Th: (Cauchy-Peano) Soit $f: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continue. Alors $(\mathcal{E}) \begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(0) = c \end{cases}$ admet une solution.

Rq 52: - La solution maximale n'est pas nécessairement unique
ex: $\begin{cases} y' = |y|^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$, $x \to 0$ et $x \to \frac{x^3}{9}$ sont solutions.

Lemme 53: (Sortie de tout compact) Soit $(f,]T_*, T^*[)$ une solution maximale d'un problème de Cauchy.
$T^* < +\infty \Rightarrow \forall K$ compact, $\exists x \in]T^*-\delta, T^*[$, $f(x)\notin K$.

Th 54: (Stone-Weierstrass) (K,d) un e.m compact. Soit $A \subset \mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ une sous-algèbre telle que:
i) A contient les fonctions constantes.
ii) $\forall x\neq y \in K$, $\exists f\in A$ telle que $f(x)\neq f(y)$.
Alors A est dense dans $(\mathcal{C}(K,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

App 55: - Densité de $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ dans $\mathcal{C}(K,\mathbb{R}^n)$.
- Injectivité de la transformée de Laplace.

Ecrit d'agreg 2018 Analyse-Proba

Ex 56: - Résolution de $\begin{cases} y''+y = 2\cos(t) \\ y(0)=0,\ y'(0)=1 \end{cases}$ à l'aide de la transformée de Laplace.

2) Compacité faible dans un Hilbert:

Th 57: (Banach-Alaoglu) Soit H un Hilbert séparable. Soit (T_n) une suite bornée de H', alors $\exists T\in H'$ et φ une extractrice tels que $\forall x\in H$, $T_{\varphi(n)}(x) \xrightarrow[+\infty]{} T(x)$.

Th 58: H Hilbert séparable, $J : H \to \mathbb{R}$ continue convexe telle que $J(x) \xrightarrow[\|x\|\to+\infty]{} +\infty$. Alors J admet un minimum sur H.

App 59: - Soit $f\in L^2(0,1)$, $p \geq 1$. Alors $\exists!\, u \in H(0,1)$ solution de $-u'' + |u|^{p-1}u = f$ dans $L^2(0,1)$.

3) Applications de la compacité aux espaces mesurés: (X,d) e.m.

Def 60: $(X, \mathcal{B}(X), \mu)$ espace mesuré. μ est régulière si $\forall A\in\mathcal{B}(X)$, $\mu(A) = \inf\{\mu(O), A\subset O, O \text{ ouvert}\}$
$= \sup\{\mu(K), K\subset A, K \text{ compact}\}$

Lemme 61: (Vitali) Soit K compact, ~~...~~ $K \subset \bigcup_{i\in I} B(x_i, r_i)$, $\exists J \subset I$, $|J| < +\infty$ tel que les $(B(x_j, r_j))_{j\in J}$ soient deux à deux disjoints et $K \subset \bigcup B(x_j, 3r_j)$.

App 62: - Th: Soit $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\frac{1}{\lambda(B(x,h))}\int_{B(x,h)} |f(y)-f(x)|\,dy \xrightarrow[h\to 0]{\lambda\text{-pp } x} 0$.

Cor 63: Soit $f\in L^1_{loc}$, $g : x \mapsto \int_0^x f$, g est dérivable λ-pp et $g' \overset{pp}{=} f$.

Th 64: (Helly) Soit (ϕ_n) une suite de fonctions de répartition. $\exists \varphi$ extractrice et ϕ une fonction croissante continue à droite telle que $\phi_{\varphi(n)}(x) \xrightarrow[+\infty]{} \phi(x)$ en tout point de continuité de ϕ.

Def 65: Soit $\mathcal{M}$ une famille de mesures de probabilité. $\mathcal{M}$ est tendue si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists K$ compact de $\mathbb{R}^d$ tel que $\forall \mu\in\mathcal{M}$ $\mu(K^c) \leq \varepsilon$.

Th 66: (Prokhorov) Toute famille de mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ tendue est relativement compact.

App 67: - Th: (Lévy) Soit (μ_n) une famille de probabilités sur $\mathbb{R}$ et (ϕ_{μ_n}) les fonctions de répartition associées. (μ_n) converge en loi vers μ si et seulement si (ϕ_{μ_n}) converge simplement vers une fonction ϕ continue en 0. ϕ est alors la fonction de répartition de μ.