203 Utilisation de la notion de compacité.

On considère (X,d) un espace métrique.

I. Généralités sur les compacts

§1. Espaces compacts

Déf 1 : on dit que X est compact si pour tout recouvrement de X par des ouverts $(U_i)_{i\in I}$ il existe un sous-recouvrement fini.

Ex 2 : $(\mathbb{R}, |.|)$ n'est pas compact.

Ex 3 : Un espace discret fini est compact.

Prop 4 : Soit $A \subset X$. Alors on a

(i) Si A est compact alors A est fermé et borné.

(ii) Si A est fermé et inclus dans un compact alors A est compact.

C-ex 5 : dans $\mathcal{C}^0([0,1])$ la boule unité fermée n'est pas compacte.

Prop 6 : Soit (F_n) une suite décroissante de fermés non vides de X.
Si X est compact alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est non vide.

App 7 : Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe D. Alors pour tout triangle $T\subset D$ on a $\int_{\partial T} f(z)dz = 0$.

Thm 8 : (Bolzano - Weierstrass)
L'espace X est compact si et seulement si de toute suite $(x_n)\in X^{\mathbb{N}}$ on peut extraire une sous-suite convergente.

Rmq 9 : on peut définir la compacité dans le des espaces séparés, mais alors l'équivalence ci-dessus ne tient plus.

Prop 10 : Toute suite d'éléments d'un compact admettant une unique valeur d'adhérence converge.

App 11 : L'application $\exp : S_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

§2. Fonctions continue sur un compact

Dans la suite, X est supposé compact.

Thm 12 (Dini) : Soit (f_n) une suite croissante de fonctions continues à valeurs réelles convergeant simplement vers une fonction continue.
Alors la convergence est uniforme.

Ex 13 : Si $P_0 = 0$ et $\forall n\in\mathbb{N}\ P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x^2 - P_n^2(x))$
Alors la suite (P_n) converge uniformément sur $[-1,1]$ vers $|.|$.

Thm 14 : (Heine)
Une fonction continue sur X est uniformément continue sur X.

Cor 15 : Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes sur $[a,b]$ convergeant vers une fonction continue.

Alors la convergence est uniforme.

App 16 : (Glivenko-Cantelli) Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de fonction de répartition F.

Notons $\hat{F}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{]-\infty,t[}(X_i)$.

Alors presque sûrement $\lim_{n \to +\infty} \| \hat{F}_n - F \|_\infty = 0$

Thm 17 : L'image d'un compact par une application continue est compacte.

App 18 : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ dérivable sur $]a,b[$.

Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(a) - f(b) = (a-b) f'(c)$$

Thm 19 : Soit $F : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Une solution maximale à l'équation

$$y' = F(t,y)$$

est globale ou sort de tout compact.

Thm 20 : (Hadamard-Lévy)

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme

(ii) f est propre et $\forall x \in \mathbb{R}$ $df(x) \in GL(\mathbb{R}^n)$

DEV1

Thm 21 : Soit $f : X \to X$ vérifiant

$$\forall (x,y) \in X^2 \quad x \neq y \Rightarrow d(f(x), f(y)) < d(x,y)$$

Alors f admet un unique point fixe.

Prop 22 : Soit Y un espace métrique et $f : X \to Y$ continue, bijective.

Alors f est un homéomorphisme.

II Compacité dans les espaces vectoriels normés de dimension finie.

§1. Description des compacts.

Prop 23 : les intervalles fermés bornés de $\mathbb{R}$ sont compacts.

Thm 24 : Un produit fini de compact est compact.

Cor 25 : dans un espace vectoriel normé de dimension finie, les parties fermées et bornées sont compactes.

Ex 26 : $O_n(\mathbb{R})$ est compact

Ex 27 : les boules fermées d'un evn de dimension finie sont compactes.

App 28 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il existe $(\Gamma, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^+(\mathbb{R})$ tel que

$$M = \Gamma S$$

Thm 29 : Soit E un espace vectoriel normé. Alors $\dim E < +\infty$ ssi $\overline{B(0,1)}$ est compacte.

§2. Convexes compacts

Thm 30 : L'enveloppe convexe d'un compact est compact.

Thm 31 : Soient A, B deux convexes disjoints de $\mathbb{R}^n$ avec A compact et B fermé. Alors il existe $\varphi \in (\mathbb{R}^n)^*$ tel que $\sup_{x \in A} \varphi(x) < \inf_{x\in B} \varphi(x)$.

App 32 : On a : $\mathrm{Conv}(O_n(\mathbb{R})) = B_{\|\cdot\|_2}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$

III. Espaces de fonctions continues sur un compact

§1. Sous-algèbres denses

Thm 33 : (Stone-Weierstrass) Soit A une sous algèbre de $\mathcal{C}^0(X,\mathbb{R})$ séparant les points et telle que $\forall x \in X\ \exists f \in A\ \ f(x) \neq 0$.
Alors A est dense dans $\mathcal{C}^0(X,\mathbb{R})$ pour $\|\cdot\|_\infty$.

App 34 : les fonctions polynomiales sont denses dans $\mathcal{C}^0([0,1]^d, \mathbb{R})$.

App 35 : les polynômes trigonométriques sont denses dans $\mathcal{C}^0_{2\pi}$

§2. Sous-ensembles compacts

DéF 36 : Soit $A \subset \mathcal{C}^0(X,\mathbb{R})$. On dit que A est équicontinue si $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\ \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*\ \forall (x,y) \in X^2$ $d(x,y) < \delta \Rightarrow \forall f \in A\ \ d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Ex 37 : l'ensemble $\{f \in \mathcal{C}^0([0,1]) \,/\, \forall (x,y) \in [0,1]^2\ |f(x)-f(y)| \leq k|x-y|\}$ où $k \in \mathbb{R}_+$ est équicontinu.

Thm 38 : (Ascoli)
Soit $A \subset \mathcal{C}^0(X,\mathbb{R})$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\overline{A}$ est compact

(ii) A est équicontinue et borné

App 39 : Un sous espace vectoriel fermé de $\mathcal{C}^1([0,1])$ pour $\|\cdot\|_\infty$ est de dimension finie.

Thm 40 : Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert U de $\mathbb{C}$, uniformément bornée sur tout compact de U.
Alors il existe une sous-suite de (f_n) qui converge uniformément sur tout compact de U vers une fonction holomorphe.

Thm 41 : Soit $p \in [1, +\infty[$ et $\mathcal{F} \subset L^p(\mathbb{R}^d)$ fermé.
Alors $\mathcal{F}$ est compact si et seulement si on a

(i) $\mathcal{F}$ est borné

(ii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists R > 0\ \forall f \in \mathcal{F}\ \ \int_{\|x\|>R} |f(x)|^p dx < \varepsilon$

DEV2 (iii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall h \in B(0,\delta)\ \forall f \in \mathcal{F}\ \|\tau_h f - f\|^p_{L^p} < \varepsilon$.

App 42 : Soit $\mathcal{F} \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ borné tel que

$$\lim_{R\to+\infty} \sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{|x|>R} |f(x)|^2 dx = 0, \quad \lim_{R\to+\infty} \sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{|x|>R} |\hat{f}(x)|^2 dx = 0$$

Alors $\mathcal{F}$ est compact.