904

Connexité: Exemples et applications

I) Généralités

1) Définitions et exemples

Soit (X, τ) un espace topologique.

Déf-Prop: Les assertions suivantes sont équivalentes :

a) Si $X = G_1 \sqcup G_2$ avec G_1, G_2 ouverts disjoints, alors $G_1 = \emptyset$ ou $G_2 = \emptyset$

b) Si $X = F_1 \sqcup F_2$ " F_1, F_2 fermés " $F_1 = \emptyset$ ou $F_2 = \emptyset$

c) Si $A \subset X$ est ouvert, fermé et non vide, alors $A = X$

d) Toute application continue $\varphi : X \to \mathbb{Z}$ est constante.

X est dit connexe s'il vérifie a), b), c) ou d) [Q], p105

Déf: Soit $Y \subset X$. On dit que Y est une partie connexe de X si Y muni de la topologie induite par celle de X est connexe. [Q]

Ex: . Les singletons $\{x\}, x \in X$ et l'ensemble vide sont connexes.

. $[0,1]$ est un connexe de $\mathbb{R}$.

. $\mathbb{Q}$ n'est pas une partie connexe de $\mathbb{R}$

Lemme: [Passage des douanes]

Soit $A \subset X$. Toute partie connexe C de X qui rencontre l'intérieur et l'extérieur de A rencontre aussi la frontière de A.

2) Stabilités

Soient (X, τ_X) et (Y, τ_Y) deux espaces topologiques.

Thm: a) Si les A_i sont connexes dans X et $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$, alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ est connexe 

b) Si $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une chaîne $(A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset, \forall i \in [\![1, n-1]\!])$ de connexes, alors $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ est connexe  [Q]

C-ex: . Une réunion non connexe de deux parties connexes dont les adhérences se rencontrent : $A =]-\infty, 0[$ et $B =]0, +\infty[$.

. Une intersection de connexes n'est pas nécessairement connexe :  un cercle et un segment.

Thm: . L'image d'un connexe par une application continue est connexe

. Si $A \subset X$ est connexe et si $A \subset B \subset \bar{A}$, alors B est connexe.

... $\bar{A}$ est connexe [Q]

Application: $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe.

Thm: Les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Applications : . TVI : Soit $f : X \to \mathbb{R}$ continue. Si X est connexe et f prend deux valeurs α, β, alors f prend toutes les valeurs $\alpha \leq t \leq$ ...

. Brouwer en dim 1 : Toute fonction continue $f : [a,b] \to [a,b]$ admet un point fixe.

Prop: Soient (X_i, τ_i) des espaces topologiques, $X = \prod_{i \in I} X_i$. Alors :
X est connexe $\iff \forall i \in I$, X_i est connexe. [Q]

3) Composantes connexes

Déf: Les composantes connexes sont les classes d'équivalence de la relation d'équivalence dans X :
$$x \mathcal{R} y \iff \exists C \text{ connexe de } X \text{ tq } x, y \in C.$$
$C(x)$ est appelée la composante connexe de $x \in X$.

Prop: $C(x)$ est la réunion de tous les connexes contenant x. C'est aussi le plus grand connexe contenant x. $C(x)$ est une partie fermée de X.

Prop: Si $X = \bigsqcup_{i \in I} \omega_i$ où les ω_i sont ouverts connexes non vides alors les ω_i sont les composantes connexes de X.

Ex: . Les composantes connexes de $\mathbb{R}^*$ sont $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^-$.

. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue de graphe G. $\mathbb{R}^2 \setminus G$ admet deux composantes connexes : l'épigraphe et l'hypographe $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y < f(x)\}$ de f

II) Connexité par arcs

1) Définitions, premières propriétés [G]

Déf: Soit (E,d) un espace métrique. On appelle chemin de E toute application $\gamma : [0,1] \to (E,d)$ continue. L'image $\gamma([0,1])$ du chemin s'appelle un arc, $\gamma(0)$ l'origine de l'arc et $\gamma(1)$ l'extrémité.

Déf: Soit (E,d) un espace métrique. On dit que E est connexe par arcs si pour tout $(a,b) \in E \times E$, il existe un arc inclus dans E d'origine a et d'extrémité b.

Ex : $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est connexe par arcs.

Application : $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes hm: Un espace connexe par arcs est connexe.

r-ex: $\{(x, \sin(1/x)), x \in]0,1[\}$ est une partie connexe mais on connexe par arcs.

2) Connexité par lignes brisées (dans un EVN) [G]

Ici, E désigne un $\mathbb{R}$-ev.

éf: Soient $a, b \in E$. On appelle segment d'extrêmités a t b l'ensemble $\{\lambda a + (1-\lambda) b, \lambda \in [0,1]\}$, noté $[a,b]$

éf: On appelle ligne brisée de E joignant deux points a et b E tout ensemble de la forme :

$$\bigcup_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i] \quad \text{où } n \in \mathbb{N}, x_0 = a, x_n = b \text{ et } \forall i \in [\![1,n]\!], x_i \in E$$

éf: Une partie A de E est dite connexe par lignes brisées par tout $a, b \in E$, il existe une ligne brisée incluse dans joignant a et b.

x:  est connexe par lignes brisées.

q: Il est clair qu'une ligne brisée est un arc. Une partie E connexe par lignes brisées est donc connexe par arcs.

x: Un $\mathbb{R}$-evn E est connexe par lignes brisées (donc onnexe par arcs, donc connexe) car $\forall a, b \in E$, $[a,b] \subset E$.

hm: Soit E un $\mathbb{R}$-evn, $\Omega \subset E$ une partie ouverte. On a quivalence entre :

) Ω est connexe

i) Ω est connexe par lignes brisées.

1) En analyse complexe [R]

Dans cette partie, Ω désigne un domaine (c'est à dire un ouvert connexe non vide) de $\mathbb{C}$.

Déf: • $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ est un chemin si γ est C^1_{pm} i.e $\exists t_0, \dots, t_n \in [a,b]$ où $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ tq $\gamma_{|[t_i, t_{i+1}]}$ est C^1 et γ est C^0 sur $[a,b]$.

• γ est un chemin fermé (ou lacet) si de plus $\gamma(a) = \gamma(b)$.

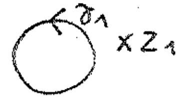
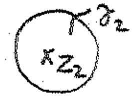
Ex: Pour $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$, le chemin défini par $\gamma(t) = a + re^{it}$ avec $t \in [0, 2\pi]$ est le cercle de centre a, de rayon r, orienté positivement :

Thm: [De l'indice]

Soit γ un chemin fermé. Posons :

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} d\zeta \quad , \quad z \in \Omega \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$$

La fonction indice Ind est une fonction à valeurs entières sur Ω, constante sur chaque composante connexe de Ω, nulle sur la composante connexe non bornée de Ω.

Ex:  $\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z_1) = 0$,  $\mathrm{Ind}_{\gamma_2}(z_2) = 1$

Déf: Soient Θ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \longrightarrow \Theta$ deux lacets ayant la même origine z_0 et même extrêmité z_1. On dit que γ_0 et γ_1 sont homotopes dans Θ s'il existe une application continue $\Gamma : [a,b] \times [0,1] \longrightarrow \Theta$ tq :

$\Gamma(\cdot, 0) = \gamma_0$, $\Gamma(\cdot, 1) = \gamma_1$ et $\forall \lambda \in [0,1]$, $\gamma_\lambda = \Gamma(\cdot, \lambda)$ est un lacet

Déf: Un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ est dit simplement connexe s'il est connexe et si tout lacet de Ω est homotope à un point de Ω.

x: $\mathbb{C}$, S^2 sont simplement connexe.

r-Ex: S^1 n'est pas simplement connexe.

hm: [Cauchy]
oit Ω un ouvert simplement connexe, $p \in \Omega$, $f \in C(\Omega)$
 $f \in H(\Omega \setminus \{p\})$. On a pour tout γ chemin fermé dans Ω
$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

pplication: [DVPT 1]
alcul de l'intégrale de Fresnel : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(1+i)$.

hm: [Formule de Cauchy]
oit γ un chemin fermé dans un ouvert simplement
onnexe Ω et $f \in H(\Omega)$. Si $z \in \Omega \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$, alors :
$$f(z)\,\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

hm: [Prolongement analytique]
i f et g sont des fonctions holomorphes sur un
omaine Ω et si $f(z)=g(z)$ pour tout z dans un ensemble
i possède un point d'accumulation dans Ω, on a alors
$f(z) = g(z)$, $\forall z \in \Omega$.

: . La fonction Γ se prolonge en une fonction holomorphe
r $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$.
La transformée de Fourier d'une gaussienne est une
ussienne.

hm: [Principe du maximum]
oit Ω un ouvert connexe, $f \in H(\Omega)$ et $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$, $r>0$.
lors : $|f(a)| \leq \max_\theta |f(a+re^{i\theta})|$ (*)

ans (*), on a égalité ssi f est constante sur Ω.

2) En algèbre

a) Groupes matriciels [MT]

Prop: . $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs donc connexe.
. $SO_n(\mathbb{K})$ est connexe ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)
. L'ensemble des projecteurs de rang p de $M_n(\mathbb{C})$ est connexe.
. $O(n)$ a deux composantes connexes homéomorphes.

Prop: . $GL_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes qui sont :
$GL_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}),\ \det A > 0\}$
$GL_n^-(\mathbb{R}) = \{\quad \text{"} \quad < \text{"}\}$
De plus, ces deux composantes connexes sont homéomorphes.
. $SL_n(\mathbb{K})$ est connexe ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

b) Groupes topologiques [NO]

Déf: Un groupe topologique est un groupe muni d'une topologie séparée pour laquelle les applications $g \mapsto g^{-1}$ et $(g,g') \mapsto gg'$ sont continues.

Prop: Un sous-groupe ouvert H d'un groupe topologique G est aussi fermé.

Cor: Dans un groupe topologique G connexe, un sous-groupe H ouvert vérifie $H = G$.

Application: [DVPT 2]
$\exp : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est surjective.

Références :

[R] : Walter RUDIN : "Analyse réelle et complexe"

[G] : Xavier GOURDON : "Analyse"

[MT] : Rached MNEIMNÉ, Frédéric TESTARD : "Introduction ... groupes de Lie classique

[NO] : Ivan NOURDIN : "Agrégation de Mathématiques, Epreuve orale"

[Q] : Hervé QUEFFÉLEC, Claude ZUILY : "Analyse pour l'agrégation"